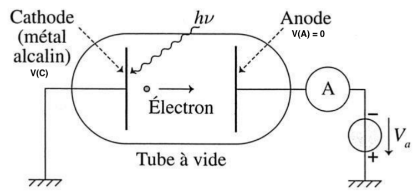
# T.D. de Mécanique Quantique - SMP4
## Série N°1

**Exercice 1:** *Rayonnement du corps noir*

1) Donner l'expression de la loi du rayonnement de Planck en fonction de la longueur d'onde $\lambda$.
2) On pose $x = \frac{hc}{\lambda kT}$, montrez que la longueur d'onde correspondante au maximum est donnée par l'équation : $5 - x = 5\,e^{-x}$.
3) Montrez que la loi du rayonnement de Planck mène à la loi de déplacement de Wien.
4) Montrez que $I = \int_0^{\infty} u(\lambda, T) d\lambda$ conduit à $I = aT^4$, où $a$ est la constante de Stefan-Boltzman.

**Exercice 2:** *Effet Photo-Électrique*

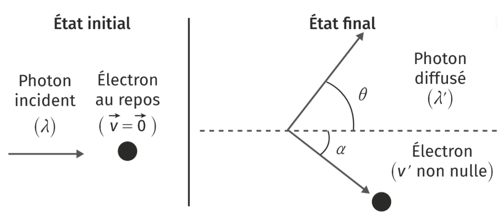
On envoie sur une cathode en Potassium deux radiations monochromatiques :
i) une ultraviolette (raie du Hg) de longueur d'onde $\lambda_{Hg} = 2537\,\mathring{A}$, et on mesure une contre-tension $|V_0| = 3.14$ Volt.
ii) l'autre visible (raie jaune du Na) dont $\lambda_{Na} = 5890\,\mathring{A}$ et la contre-tension mesurée $|V_0|$ est de 0.36 Volt.
On demande de calculer :




1) l'énergie maximale des photo-électrons éjectés
2) la valeur de la constante de Planck
3) l'énergie d'extraction minimale des électrons du potassium
4) la longueur d'onde maximale des radiations produisant un effet photo-électrique sur le potassium
5) Dans le premier cas i), le courant de saturation qui traverse la cellule est de $4\mu$A, quel est le nombre $n$ d'électrons reçus par l'anode en une seconde?

**Exercice 3:** *Effet Compton*

I-) Le mouvement d'un corpuscule est parfaitement défini si on se donne : un nombre qui représente l'énergie de la particule et un vecteur qui représente l'impulsion de la particule. Sachant que ces grandeurs physiques sont données par : $E = mc^2$ et $\vec{p} = m\vec{v}$, où $m^2 = m_0^2/(1-\beta^2)$ tel que $\beta = v/c$




1) Montrer que l'on a : $E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$

II-) On considère un faisceau de photons monochromatiques de longueur d'onde se déplaçant dans le vide, ce faisceau est dirigé sur une cible ne contenant que des électrons libres que l'on supposera au repos. Soit $m_0$ la masse au repos de l'électron, $\vec{p}_\gamma$, $\vec{p}_\gamma'$ et $\vec{p}_e'$ les impulsions de l'électron et le photon avant et après le choc.

1) Écrire les équations de conservation de l'impulsion et de l'énergie lors du choc photon-électron.
2) Connaissant les expressions relativistes de l'énergie et de l'impulsion, calculer la variation de la longueur d'onde en fonction de l'angle $\theta$ que fait le photon diffusé avec le photon incident.
3) Montrer que l'énergie cinétique maximale transférée à l'électron après diffusion est : $E_c^{max} = h\nu_0/(1 + \frac{mc^2}{2h\nu_0})$

III-) Un électron frappé par un Rayon $X$ de 0.5 MeV acquiert une énergie de 0.1 MeV.

1) Calculer la longueur d'onde du photon diffusé sachant que l'électron était initialement au repos.
2) Calculer l'angle que fait le photon diffusé avec le photon incident.

On donne : $h/m/c = 0.024$ Å ($= \lambda_C$ dite longueur d'onde de compton).

**Exercice 4:** *Traitement classique ou quantique*

Une action est une grandeur homogène à (quantité de mouvement)×(longueur) ou encore (énergie) ×(temps). La constante $h$ est le quantum fondamental d'action. Le critère admis est le suivant: lorsqu'une action associée au système prend une valeur proche de $h$, le comportement d'un tel système doit être décrit par la théorie quantique. Si au contraire une action est très grande par rapport à $h$, une description classique est suffisante.
Classer les systèmes suivants selon qu'ils relèvent de la théorie classique ou quantique :

1) Atome d'hydrogène dont l'énergie d'ionisation est 13 eV émettant une radiation de longueur d'onde $\lambda = 100\,\text{nm}$.
2) Une montre à ressort possédant des parties mobiles de taille et de masse typiques : $d = 0.1\,mm$ et $m = 0.1\,mg$ et un temps typique $t = 1\,s$.
3) Un noyau dont l'énergie de liaison (neutron ou proton) est typiquement de l'ordre de 8 MeV; la dimension caractéristique du noyau se situe autour de $r = 1\,fm$ ($1fm = 10^{-15}\,m$) tandis que la masse d'un nucléon vaut $1.6.10^{-27}$ Kg.

**Exercice 5:** *Diffraction sur un cristal*

On a réalisé des expériences de diffraction sur un cristal en utilisant divers types de particules :

1) Sachant que la distance inter-atomique $d$ du cristal est de l'ordre de l'angström (Å), quelle doit être la longueur d'onde des rayons X à utiliser ? Quelle est l'énergie des photons correspondant ?
2) On remplace le faisceau de rayons X par des neutrons. À la température $T$, leur énergie est donnée par $E = \frac{3}{2}k_B T$
Calculer la longueur d'onde $\lambda$ de l'onde de matière associée aux neutrons (T = 300K).
Pourrait-on observer une figure de diffraction ?
3) On utilise à présent des électrons accélérés sous une tension $U$. Quel doit être l'ordre de grandeur de $U$ pour réaliser l'expérience ?

**Exercice 6:** *Atome d'hydrogène*

La fonction d'onde décrivant l'état fondamental de l'électron de l'atome d'hydrogène s'écrit, en coordonnées sphériques : $\psi(r) = C\,e^{-\frac{r}{a}}$, où $C$ est une constante réelle et positive et $a$ est le rayon de l'orbite de Bohr : $a = 0.53 \times 10^{-10}\,m$.

1) Calculer la constante $C$.
2) Calculer la densité de probabilité de présence de l'électron et tracer son allure.
3) Calculer la probabilité de trouver l'électron entre les deux sphères de rayons $r$ et $r + dr$. Pour quelle valeur de $r$, cette probabilité est-elle maximale ?

**Exercice 7:** *Paquet d'ondes gaussien (facultatif)*

Une particule libre de masse $m$, d'impulsion $p = \hbar k$ et d'énergie $E$ décrite par le paquet d'ondes $\psi(x,t)$ à une dimension :

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int g(k)\, e^{i(kx-\omega t)} dk$$

1) Trouver la relation entre $E$ et $k$. En déduire la relation de dispersion $\omega(k)$.
2) On considère le paquet d'ondes à l'instant initial : $\psi(x, t = 0) = \psi(x)$.

a) Montrer que $g(k)$ n'est autre que la transformée de Fourier de $\psi(x)$.

b) Établir l'égalité de Parseval Plancherel :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(k)|^2 dk$$

**On suppose par la suite que la fonction est une gaussienne centrée en $k_0$ :**

$$g(k) = \left(\frac{a^2}{2\pi}\right)^{1/4} exp\left(-\frac{a^2}{4}(k-k_0)^2\right)$$

où $a$ est une constante ayant la dimension d'une longueur.

3) Paquet d'ondes à l'instant $t = 0$ :

a) Montrer que $\psi(x,0)$ est donnée par : $\psi(x,0) = \left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{1/4} e^{ik_0 x} e^{-\frac{x^2}{a^2}}$

b) On définit le centre du paquet d'ondes par le point $x_M$ où $|\psi(x,0)|^2$ est maximale; donner la position du centre du paquet d'ondes.

c) Montrer que la probabilité de trouver la particule dans tout l'espace est égale à 1.

d) On définit la largeur $\Delta y$ d'une gaussienne $f(y) = exp(-y^2/b^2)$ par $\Delta y = b/\sqrt{2}$. Déterminer les largeurs $\Delta x(0)$ de $|\psi(x,0)|^2$ et $\Delta k(0)$ de $|g(k)|^2$. En déduire que le paquet d'ondes $\psi(x,0)$ obéit à la relation d'incertitude d'Heisenberg.

4) Evolution du paquet d'ondes $\psi(x,t)$ dans le temps :

A l'instant $t > 0$, l'expression du paquet d'ondes $\psi(x,t)$ est de la forme (à ne pas démontrer) :

$$\psi(x,t) = \left(\frac{2a^2}{\pi}\right)^{1/4} \frac{e^{i\phi} . e^{ik_0 x}}{\left(a^4 + \frac{4\hbar^2 t^2}{m^2}\right)^{1/4}} exp\left[-\frac{\left(x - \frac{\hbar k_0}{m} t\right)}{a^2 + \frac{2i\hbar t}{m}}\right]$$

a) Calculer la densité de probabilité $|\psi(x,t)|^2$ associée à la particule à l'instant $t$.

b) Déterminer la position $x_M(t)$ du centre du paquet d'ondes à l'instant $t$. Quelle est sa vitesse de déplacement ? La comparer à la vitesse de groupe associée au paquet.

c) Déterminer la largeur $\Delta x(t)$ et l'amplitude $A(t)$ de $|\psi(x,t)|^2$. Décrire qualitativement la variation de ces deux grandeurs en fonction du temps. Conclure quant à l'évolution de la forme de la densité de probabilité au cours du temps.

**Données**

On donne :

- $I = \int_{-\infty}^{+\infty} exp(-\alpha^2 y^2 + \beta y) dy = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^2}} exp\left(\frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right)$
- $\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$
- Solution de l'équation : $5 - x = 5e^{-x}$ est $x \approx 4.965$
- $m_e = 9.109 \times 10^{-31}$ Kg
- $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J.s
- $c = 3 \times 10^8$ m/s
- $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ SI