T.D. de Mécanique Quantique - SMP4
Série N°3

Exercice 1: *Opérateurs Linéaires*

Soient **A**, **B** et **C** des opérateurs linéaires.

1) Montrer que :

a) $[\mathbf{A}, \mathbf{B}+\mathbf{C}] = [\mathbf{A}, \mathbf{B}] + [\mathbf{A}, \mathbf{C}]$

b) $[\mathbf{A}, \mathbf{BC}] = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{C} + \mathbf{B}[\mathbf{A}, \mathbf{C}]$

c) En déduire que $[\mathbf{A}, \mathbf{B}^n] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{B}^i[\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{B}^{n-i-1}$

d) $[\mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}]] + [\mathbf{B}, [\mathbf{C}, \mathbf{A}]] + [\mathbf{C}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] = 0$ (Identité de Jacobi)

e) $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]^\dagger = [\mathbf{B}^\dagger, \mathbf{A}^\dagger]$, que peut-on dire si A et B sont hermitiques ?

2) Soit G(**B**) une fonction de **B**. Montrer que si **A** et **B** commutent avec [**A**,**B**] alors

$$[\mathbf{A}, G(\mathbf{B})] = \frac{dG(\mathbf{B})}{d\mathbf{B}}[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$$

Exercice 2: *Représentation matricielle d'un opérateur*

Soit **A** un opérateur représenté dans la base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ par la matrice :

$$\widehat{A} = a\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{où } a \text{ est un réel non nul}$$

1) **A** est-il hermitique ? Déterminer ses valeurs propres et les vecteurs propres.
2) **A** est-elle une observable ?
3) Écrire la matrice de **A** et celle de $F(\mathbf{A})$ dans la base propre de $\widehat{A}$. Faire application pour $e^{\mathbf{A}}$ et $\sqrt{\mathbf{A}}$.

Exercice 3: *E.C.O.C*

On considère un système physique dont l'espace des états ξ est de dimension 3 et soit $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ une base orthonormée de ξ. Les kets de cette base sont des vecteurs propres de deux opérateurs **A** et **B** (indépendants du temps) :

$$\mathbf{A}|1\rangle = a|1\rangle, \qquad \mathbf{B}|1\rangle = b|1\rangle,$$
$$\mathbf{A}|2\rangle = a|2\rangle, \qquad \mathbf{B}|2\rangle = -b|2\rangle,$$
$$\mathbf{A}|3\rangle = 0, \qquad \mathbf{B}|3\rangle = -b|3\rangle.$$

où a et b sont des constantes réelles non nulles.
L'opérateur Hamiltonien **H** du système (aussi indépendant du temps) est tel que :

$$\mathbf{H}|1\rangle = E|1\rangle + \sqrt{3}E|2\rangle; \qquad \mathbf{H}|2\rangle = \sqrt{3}E|1\rangle - E|2\rangle; \qquad \mathbf{H}|3\rangle = E|3\rangle$$

1) **A** et **B** sont-ils des observables ?
2) Les ensembles $\{\mathbf{A}\}$, $\{\mathbf{B}\}$, $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$ sont-ils des E.C.O.C dans ξ ?

3) Écrire la matrice représentant **H** dans la base $\{|i\rangle\}$, i=1,2,3. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de **H**.
4) Vérifier que **H** commutent avec **A** et donner une base formée de vecteurs propres communs à **H** et **A**. Les ensembles $\{\mathbf{H}\}$, $\{\mathbf{A}, \mathbf{H}\}$ forment-ils des E.C.O.C dans ξ ?

Exercice 4: *Opérateurs Linéaires* **(facultatif)**

1) Pour un opérateur linéaire arbitraire L montrer que :

   a) $(L^{\dagger})^{\dagger} = L$;
   b) les opérateurs $L^{\dagger}L$ et $LL^{\dagger}$ sont hermitiens;
   c) les opérateurs $L + L^{\dagger}$ et $i(L - L^{\dagger})$ sont hermitiens;

2) Montrer que si l'opérateur C est hermitien, l'opérateur $G = ACA^{\dagger}$ l'est également.
3) Démontrer la relation suivante :

$$e^{A}\, B\, e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \ldots$$

Exercice 5: *Equation aux valeurs propres* **(facultatif)**

Soit $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$ une base orthonormée de l'espace des des états à deux dimensions et on considère un ket $|\Psi\rangle$ défini par :

$$|\Psi\rangle = |u_1\rangle + i|u_2\rangle$$

1) **a**) Montrer que $|\Psi\rangle$ n'est pas normé à l'unité
   b) Définir à partir de $|\Psi\rangle$ un ket normé à l'unité que l'on note $|\Phi\rangle$
2) Déterminer dans la base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$, la matrice représentant l'opérateur projecteur, noté **K**, sur le ket $|\Phi\rangle$, **K** est-il hermitique ?
3) Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de **K** (à un facteur de phase global près). On notera par $|\phi_1\rangle$ et $|\phi_2\rangle$ ces vecteurs propres.
4) Montrer que $|\phi_1\rangle$ et $|\phi_2\rangle$ vérifient la relation d'orthonormalisation et la relation de fermeture.
5) On considère un opérateur **A** représenté, dans la base $\{|u_i\rangle\}$, par la matrice : $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   a) Calculer dans cette base la matrice représentant l'opérateur $\sqrt{\mathbf{A}}$
   b) Meme question pour l'opérateur $\mathbf{A}^{3/2}$