T.D. de Mécanique Quantique - SMP4
Correction Série N°3

Solution 1: *Opérateurs Linéaires*

On considère trois opérateurs linéaires A, B et C.

1. **Montrer les relations suivantes**

   a) **Montrer que** $[\mathbf{A}, \mathbf{B}+\mathbf{C}] = [\mathbf{A}, \mathbf{B}] + [\mathbf{A}, \mathbf{C}]$:
   On a

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}+\mathbf{C}] = \mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) - (\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}-\mathbf{BA}-\mathbf{CA} = [\mathbf{A}, \mathbf{B}] + [\mathbf{A}, \mathbf{C}]$$

   Généralisation :

$$\left[\sum_i \mathbf{A}_i, \sum_k \mathbf{B}_k\right] = \sum_{i,k}\left[\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_k\right]$$

   b) **Montrer que** $[\mathbf{A}, \mathbf{BC}] = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{C} + \mathbf{B}[\mathbf{A}, \mathbf{C}]$:
   développons le second membre de l'égalité :

$$\begin{aligned}
[\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{C} + \mathbf{B}[\mathbf{A}, \mathbf{C}] &= (\mathbf{AB}-\mathbf{BA})\mathbf{C} + \mathbf{B}(\mathbf{AC}-\mathbf{CA}) \\
&= \mathbf{ABC}-\mathbf{BAC}+\mathbf{BAC}-\mathbf{BCA} \\
&= \mathbf{ABC}-\mathbf{BCA} \\
&= \mathbf{A}(\mathbf{BC})-(\mathbf{BC})\mathbf{A} \\
&= [\mathbf{A}, \mathbf{BC}]
\end{aligned}$$

   c) **Démontrons par récurrence la relation :** $[\mathbf{A}, \mathbf{B}^n] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{B}^i[\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{B}^{n-i-1}$:
   On a : $[\mathbf{A}, \mathbf{BC}] = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{C} + \mathbf{B}[\mathbf{A}, \mathbf{C}]$. Si $\mathbf{B} = \mathbf{C}$, alors :

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}^2] = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{B} + \mathbf{B}[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{B}^0[\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{B}^1 + \mathbf{B}^1[\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{B}^0$$

   Le développement est donc vérifié pour n=1 et n=2.
   Supposons qu'il le soit pour n-1 ($n \geq 2$) :

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}^{n-1}] = \sum_{i=0}^{n-2} \mathbf{B}^i[\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{B}^{n-i-2}$$

   On a :

$$\begin{aligned}
[\mathbf{A}, \mathbf{B}^n] &= [\mathbf{A}, \mathbf{BB}^{n-1}] = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{B}^{n-1} + \mathbf{B}[\mathbf{A}, \mathbf{B}^{n-1}] \\
&= [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{B}^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} \mathbf{B}^{i+1}[\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{B}^{n-i-2} \\
&= [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{B}^{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{B}^{j}[\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{B}^{n-j-1} \ ; \ (j = i+1) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{B}^{j}[\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{B}^{n-j-1}
\end{aligned} \tag{1}$$

d) **Montrons que** $[\mathbf{A},[\mathbf{B},\mathbf{C}]]+[\mathbf{B},[\mathbf{C},\mathbf{A}]]+[\mathbf{C},[\mathbf{A},\mathbf{B}]]=0$
On a :

$$\begin{aligned}
[\mathbf{A},[\mathbf{B},\mathbf{C}]]+[\mathbf{B},[\mathbf{C},\mathbf{A}]]+[\mathbf{C},[\mathbf{A},\mathbf{B}]] &= \mathbf{A},[\mathbf{B},\mathbf{C}]-[\mathbf{B},\mathbf{C}]\mathbf{A}+\mathbf{B},[\mathbf{C},\mathbf{A}]-[\mathbf{C},\mathbf{A}]\mathbf{B}\\
&+ \mathbf{C},[\mathbf{A},\mathbf{B}]-[\mathbf{A},\mathbf{B}]\mathbf{C}\\
&= \mathbf{ABC}-\mathbf{ACB}-\mathbf{BCA}+\mathbf{CBA}+\mathbf{BCA}-\mathbf{BAC}\\
&- \mathbf{CAB}+\mathbf{ACB}+\mathbf{CAB}-\mathbf{CBA}-\mathbf{ABC}+\mathbf{BAC}\\
&= 0
\end{aligned}$$

C'est l'identité de Jacobi.

e) **Montrons que** $[\mathbf{A},\mathbf{B}]^\dagger=[\mathbf{B}^\dagger,\mathbf{A}^\dagger]$
On a

$$\begin{aligned}
[\mathbf{A},\mathbf{B}]^\dagger &= (\mathbf{AB}-\mathbf{BA})^\dagger\\
&= (\mathbf{AB})^\dagger-(\mathbf{BA})^\dagger\\
&= \mathbf{B}^\dagger\mathbf{A}^\dagger-\mathbf{A}^\dagger\mathbf{B}^\dagger\\
&= [\mathbf{B}^\dagger,\mathbf{A}^\dagger]
\end{aligned}$$

Si en plus $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont hermitiques : $\Longrightarrow$ $\mathbf{A}^\dagger=\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}^\dagger=\mathbf{B}$ et donc $[\mathbf{A},\mathbf{B}]^\dagger=[\mathbf{B},\mathbf{A}]$.

2. **Démontrons que si $[\mathbf{B},[\mathbf{A},\mathbf{B}]]=0$, alors $[\mathbf{A},G(\mathbf{B})]=[\mathbf{A},\mathbf{B}]\,\frac{dG}{d\mathbf{B}}$**

Soit $\mathbf{G}(\mathbf{B})$ un polynôme d'ordre quelconque en $\mathbf{B}$ qui s'écrit comme suit :

$$G(\mathbf{B})=g_0\,\mathbf{B}^0+g_1\,\mathbf{B}^1+g_2\,\mathbf{B}^2+\cdots=\sum_j g_j\,\mathbf{B}^j$$

Alors

$$[\mathbf{A},G(\mathbf{B})]=[\mathbf{A},\sum_j g_j\,\mathbf{B}^j]=\sum_j g_j[\mathbf{A},\mathbf{B}^j]=\sum_j g_j\left(\sum_{s=0}^{j-1}\mathbf{B}^s[\mathbf{A},\mathbf{B}]\mathbf{B}^{j-s-1}\right)$$

Le commutateur $[\mathbf{A},\mathbf{B}]$ commute avec $\mathbf{B}$, il commute aussi avec $\mathbf{B}^s$ qui est fonction de $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B}^s[\mathbf{A},\mathbf{B}]=[\mathbf{A},\mathbf{B}]\mathbf{B}^s$$

D'où : :

$$[\mathbf{A},G(\mathbf{B})]=\sum_j g_j\left(\sum_{s=0}^{j-1}[\mathbf{A},\mathbf{B}]\mathbf{B}^s\mathbf{B}^{j-s-1}\right)=\sum_j g_j\left(\sum_{s=0}^{j-1}[\mathbf{A},\mathbf{B}]\mathbf{B}^{j-1}\right)=[\mathbf{A},\mathbf{B}]\sum_j g_j j\mathbf{B}^{j-1}$$

or :

$$\sum_j g_j j\mathbf{B}^{j-1}=\sum_j g_j\frac{d(\mathbf{B}^j)}{d\mathbf{B}}=\frac{d}{d\mathbf{B}}\left(\sum_j g_j\mathbf{B}^j\right)=\frac{dG}{d\mathbf{B}}$$

d'où :

$$[\mathbf{A},G(\mathbf{B})]=[\mathbf{A},\mathbf{B}]\,\frac{dG}{d\mathbf{B}}$$

Solution 2: *Représentation matricielle d'un opérateur*

Soit $\mathbf{A}$ un opérateur représenté dans la base $\{|u_1\rangle,|u_2\rangle,|u_3\rangle\}$ par la matrice :

$$\widehat{A}=a\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\qquad \text{où } a \text{ est un réel non nul}$$

1) **A est-il hermitique ?**
On constate que **A** est une matrice réelle et symétrique, et le $\mathbf{A}^{\dagger} = (\mathbf{A}^{*})^{t} = \mathbf{A} \implies$ **A** est hermitique
valeurs propres de $\widehat{A}$
elles sont déterminées en calculant le déterminant de $\widehat{A}$ comme suite :

$$\begin{aligned} det(\widehat{A} - \lambda \mathbb{I}_{3\times3}) &= \begin{vmatrix} a-\lambda & a & a \\ a & a-\lambda & a \\ a & a & a-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff (a-\lambda)\begin{vmatrix} a-\lambda & a \\ a & a-\lambda \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} a & a \\ a & a-\lambda \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} a & a \\ a-\lambda & a \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Les valeurs propres de $\widehat{A}$ sont $\lambda = 0$ ($g_{\lambda=0} = 2$ ou bien deux fois dégénérée) et $\lambda = 3a$ (non dégénérée ou bien simple)
vecteurs propres de $\widehat{A}$
Soient

- $|\phi_1\rangle = \sum_i x_i |u_i\rangle$ et $|\phi_2\rangle = \sum_i y_i |u_i\rangle$ les deux vecteurs propres associés à $\longrightarrow \lambda = 0$.
- $|\phi_3\rangle = \sum_i z_i |u_i\rangle$ le vecteur propre associé à $\longrightarrow \lambda = 3a$.

Alors

- $\widehat{A}|\phi_1\rangle = 0 \implies x_1 + x_2 + x_3 = 0$, avec $\langle\phi_1|\phi_1\rangle = \sum_i |x_i|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. On obtient alors le système :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \end{cases}$$

en prenant $x_3 = 0$, et donc $x_2 = -x_1$ il s'en suit que $\boxed{|\phi_1\rangle = (|u_1\rangle - |u_2\rangle)/\sqrt{2}}$.

- $\widehat{A}|\phi_2\rangle = 0 \implies y_1 + y_2 + y_3 = 0$, avec $\langle\phi_2|\phi_2\rangle = \sum_i |y_i|^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$ ET $\langle\phi_1|\phi_2\rangle = 0$ (puisque se sont deux vecteurs de la base et sont orthogonaux). On obtient alors le système :

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 0 \\ y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1 \\ y_1/\sqrt{2} - y_2/\sqrt{2} + 0 \times y_3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y_1 = y_2 \\ y_3 = -(y_1 + y_2) \end{cases} \implies \begin{cases} y_1 = 1/\sqrt{6} = y_2 \\ y_3 = -2/\sqrt{6} \end{cases}$$

il s'en suit que $\boxed{|\phi_2\rangle = (|u_1\rangle + |u_2\rangle - 2|u_3\rangle)/\sqrt{6}}$.

- $\widehat{A}|\phi_3\rangle = 3a|\phi_3\rangle \implies$

$$\begin{cases} -2z_1 + z_2 + z_3 = 0 \\ z_1 - 2z_2 + z_3 = 0 \\ z_1 + z_2 - 2z_3 = 0 \end{cases}$$

avec $\langle\phi_1|\phi_3\rangle = \langle\phi_2|\phi_3\rangle = 0$ (puisque se sont deux vecteurs de la base et sont orthogonaux) ET $\langle\phi_3|\phi_3\rangle = \sum_i |z_i|^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 1$. On obtient après calcul $z_1 = z_2 = z_3$ ce qui donne $\boxed{|\phi_2\rangle = (|u_1\rangle + |u_2\rangle + |u_3\rangle)/\sqrt{3}}$.

2) **A est-elle une observable ?**
On a l'ensemble $\{|\phi_i\rangle\}_{i=1,2,3}$ est formé de kets linéairement indépendants $\implies \{|\phi_i\rangle\}$ vérifie les relations d'orthonormalisation et de fermeture $\implies \{|\phi_i\rangle\}$ forme une base. Il s'en suit alors que A est un observable.
3) **La matrice de A et celle de $F(\mathbf{A})$ dans la base propre de $\widehat{A}$.**
Dans ce qui suit on représente l'opérateur **A** dans les deux bases

dans la base $\{\|u_i\rangle\}$	dans la base propre de A $\{\|\phi_i\rangle\}$
$\hat{A} = \begin{array}{c} \\ \langle u_1\| \\ \langle u_2\| \\ \langle u_3\| \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \|u_1\rangle & \|u_2\rangle & \|u_3\rangle \end{array} \\ \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix} \end{array}$	$\hat{A} = \begin{array}{c} \\ \langle \phi_1\| \\ \langle \phi_2\| \\ \langle \phi_3\| \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \|\phi_1\rangle & \|\phi_2\rangle & \|\phi_3\rangle \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3a \end{pmatrix} \end{array}$

Application pour $e^{\mathbf{A}}$ et $\sqrt{\mathbf{A}}$.
En utilisant la règle :

$$\mathbf{A}\,|\phi\rangle = \lambda\,|\phi\rangle \implies F(\mathbf{A})\,|\phi\rangle = F(\lambda)\,|\phi\rangle$$

on écrit

$$(F(\hat{A})) = \begin{pmatrix} F(0) & 0 & 0 \\ 0 & F(0) & 0 \\ 0 & 0 & F(3a) \end{pmatrix}$$

Donc

$$(e^A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{3a} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (\sqrt{A}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3a} \end{pmatrix}$$

dans l'ordre $|\phi_1\rangle$, $|\phi_2\rangle$, $|\phi_3\rangle$.

Solution 3: *E.C.O.C*

On considère un système physique dont l'espace des états ξ est de dimension 3 et soit $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ une base orthonormée de ξ. Les opérateurs **A** et **B** (indépendants du temps) se décomposent dans cette base comme suit :

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

où a et b sont des constantes réelles non nulles.

1) **A et B sont-ils des observables**
   - Les éléments des deux matrices sont réels $\implies$ **A** et **B** sont hermitiques
   - Les vecteurs propres sont $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle \equiv$ kets de la base

   $\implies$ **A** et **B** sont des observables.
2) **Les E.C.O.C possibles dans ξ**

   Les V_p $(\vec{V}_p)$ de $\hat{A}$
   - $\lambda = a \longrightarrow |1\rangle$
   - $\lambda = a \longrightarrow |2\rangle$
   - $\lambda = 0 \longrightarrow |3\rangle$

   Les V_p $(\vec{V}_p)$ de $\hat{B}$
   - $\mu = b \longrightarrow |1\rangle$
   - $\mu = -b \longrightarrow |2\rangle$
   - $\mu = -b \longrightarrow |3\rangle$

   On constate que la valeur propre $\lambda = a$ est deux fois dégénérée, c-à-d qu'il $\exists$ deux $\vec{V}_p$ associés à cette valeurs qui sont : $|1\rangle$ et $|2\rangle \implies \{\mathbf{A}\}$ ne forme pas un E.C.O.C.
   De même, on constate que la valeur propre $\mu = -b$ est deux fois dégénérée, c-à-d qu'il $\exists$ deux $\vec{V}_p$ associés à cette valeurs qui sont : $|2\rangle$ et $|3\rangle \implies \{\mathbf{B}\}$ ne forme pas un E.C.O.C.
   Maintenant on regarde l'ensemble $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$
   i) on vérifie aisément que $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA} = 0$
   ii) le tableau suivant regroupe les différentes V_p et $\vec{V}_p$

$\vec{V}_p$ communs	V_p de $\hat{A}$	V_p de $\hat{B}$
$\|1\rangle$	a	b
$\|2\rangle$	a	-b
$\|3\rangle$	0	-b

À chaque couple de valeurs propres de $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ correspond un seul vecteur propre commun : $\{a,b\} \leftrightarrow |1\rangle$, $\{a,-b\} \leftrightarrow |2\rangle$ et $\{0,-b\} \leftrightarrow |3\rangle$.
On vérifie que l'ensemble $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$, vérifie les deux relations fondamentales de fermeture et d'orthonormalisation :

$$\langle i|j\rangle = \delta_{ij} \quad ; \quad \sum_{i=1}^{3} |i\rangle\langle j| = \mathbb{I}$$

Par conséquent, l'ensemble $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ forme une base de l'espace des états. Et les deux observables A et B commutent et admettent une base de $\vec{V}_p$ communs, par conséquent ils forment un E. C. O. C.

3) **la matrice représentant H dans la base $\{|i\rangle\}$, i=1,2,3**

Elle s'écrit

$$\widehat{H} = E\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

les valeurs propres

elles sont déterminées en calculant le déterminant de $\widehat{H}$ comme suite :

$$\begin{aligned} det(\widehat{H} - \lambda\mathbb{I}_{3\times 3}) &= \begin{vmatrix} E-\lambda & \sqrt{3}E & 0 \\ \sqrt{3}E & -E-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & E-\lambda \end{vmatrix} = (E-\lambda)\begin{vmatrix} E-\lambda & \sqrt{3}E \\ \sqrt{3}E & -E-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &= (E-\lambda)(\lambda+2E)(\lambda-2E) = 0 \end{aligned}$$

Les valeurs propres de $\widehat{H}$ sont : $\lambda = -2E$ (simple), $\lambda = E$ (simple) et $\lambda = 2E$ (simple).

les vecteurs propres de H.

• Soit $|\phi_1\rangle = \sum_i x_i |i\rangle$ le vecteur propre associé à $\longrightarrow \lambda = E$. Alors

$\widehat{H}|\phi_1\rangle = E|\phi_1\rangle \iff E\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \implies x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3$ quelconque, avec $\langle\phi_1|\phi_1\rangle = \sum_i |x_i|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_3^2 = 1 \implies x_3 = 1e^{i\theta}$. En prenant la phase $\theta = 0$, on obtient alors

$$\boxed{|\phi_1\rangle = |3\rangle}$$

• Soit $|\phi_2\rangle = \sum_i y_i |i\rangle$ le vecteur propre associé à $\longrightarrow \lambda = 2E$. Alors

$\widehat{H}|\phi_2\rangle = 2E|\phi_2\rangle \iff E\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 2E\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \implies y_1 = \sqrt{3}y_2,\ y_3 = 0$, avec $\langle\phi_2|\phi_2\rangle = \sum_i |y_i|^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = y_1^2 + y_2^2 = 3y_2^2 + y_2^2 = 1 \implies y_2 = \frac{1}{2}e^{i\theta}$. En prenant la phase $\theta = 0$, on obtient alors

$$\boxed{|\phi_2\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle + \frac{1}{2}|2\rangle}$$

• Soit $|\phi_3\rangle = \sum_i z_i |i\rangle$ le vecteur propre associé à $\longrightarrow \lambda = -2E$. Alors

$\widehat{H}|\phi_3\rangle = -2E|\phi_3\rangle \iff E\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = -2E\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \implies z_2 = -\sqrt{3}z_1,\ z_3 = 0$, avec $\langle\phi_3|\phi_3\rangle = \sum_i |z_i|^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1^2 + z_2^2 = z_1^2 + 3z_1^2 = 1 \implies z_1 = \frac{1}{2}e^{i\theta}$. En prenant la phase $\theta = 0$, on obtient alors

$$\boxed{|\phi_3\rangle = \frac{1}{2}|1\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2}|2\rangle}$$

4) **Vérifions que H commutent avec A**

On a

$$\mathbf{AH} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} E \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = aE \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbf{HA} = E \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = aE \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $\mathbf{AH} - \mathbf{HA} = 0 \implies [\mathbf{A}, \mathbf{H}] = 0$ et donc **H** commute avec **A**.

La base formée de vecteurs propres communs à H et A.

On procède en générale par la vérification si les $\vec{V}_p$ de l'un des observable le sont aussi pour l'autre. Alors

- Si on commence par les $\vec{V}_p$ de **A**, qui ne sont que les vecteurs de la base : $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$, ces vecteurs ne sont pas des $\vec{V}_p$ de **H**, et la meilleure illustration en est que :

$$\widehat{H}\,|1\rangle = E\,|1\rangle + \sqrt{3}E\,|2\rangle \neq cts\,|1\rangle$$

  donc ces vecteurs ne peuvent pas constituer une base commune pour **H** et **A**.

- Dans l'autre sens, on sait que $|\phi_1\rangle, |\phi_3\rangle, |\phi_3\rangle$ sont des $\vec{V}_p$ de **H**. Il nous reste à vérifier seulement si ces vecteurs le sont aussi pour **A**. En fait :

  - $\widehat{A}\,|\phi_1\rangle = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0\,|\phi_1\rangle$ et donc $|\phi_1\rangle$ est un $\vec{V}_p \to V_p = 0$.
  - $\widehat{A}\,|\phi_2\rangle = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = a\,|\phi_2\rangle$ et donc $|\phi_2\rangle$ est un $\vec{V}_p \to V_p = a$.
  - $\widehat{A}\,|\phi_3\rangle = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix} = a\,|\phi_3\rangle$ et donc $|\phi_3\rangle$ est un $\vec{V}_p \to V_p = a$.

$\vec{V}_p$ communs	V_p de $\widehat{H}$	V_p de $\widehat{A}$
$\|\phi_1\rangle$	E	0
$\|\phi_2\rangle$	2E	a
$\|\phi_3\rangle$	-2E	a

alors à chaque couple de valeurs propres est associé un seul ket. donc

- $\{\mathbf{H}\}$ forme à elle seule un E.C.O.C
- $\{\mathbf{H}, \mathbf{A}\}$ forme à elle seule un E.C.O.C

Solution 4: *Opérateurs Linéaires* **(facultatif)**

1) Soit L un opérateur linéaire arbitraire. On sait que : $A^\dagger = (A^*)^T$, $(A^*)^* = A$, $(A^\dagger)^\dagger = A$ et $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$. Donc

a) On a :

$$(L^\dagger)^\dagger = ((L^*)^T)^\dagger = (((L^*)^T)^*)^T = L$$

b) $(L^\dagger L)^\dagger = L^\dagger (L^\dagger)^\dagger = L^\dagger L \implies L^\dagger L$ est hermitique
$(LL^\dagger)^\dagger = (L^\dagger)^\dagger L^\dagger = LL^\dagger \implies LL^\dagger$ est hermitique

c) $(L + L^\dagger)^\dagger = (L)^\dagger + (L^\dagger)^\dagger = L + L^\dagger$ et donc $L + L^\dagger$ hermitique,
$[i(L - L^\dagger)]^\dagger = -i[(L)^\dagger - (L^\dagger)^\dagger] = -i[L^\dagger - L] = i(L - L^\dagger)$ et donc $i(L - L^\dagger)$ hermitique.

2) Soit l'opérateur hermitique C, on a donc

$$G^{\dagger} = (ACA^{\dagger})^{\dagger} = \underbrace{(A^{\dagger})^{\dagger}}_{=A}\underbrace{(C)^{\dagger}}_{=C}(A)^{\dagger} = ACA^{\dagger} = G$$

donc G est également hermitique.

3) Soit un opérateur F qui s'ecrit en fonction de deux autres A et B comme suit :

$$F = e^{\lambda A}\, B\, e^{-\lambda A} = F(\lambda)$$

où λ est une constante.
Dérivons par rapport à λ cet opérateur :

$$\frac{dF}{d\lambda} = A\, e^{\lambda A}\, B\, e^{-\lambda A} - e^{\lambda A}\, B\, A\, e^{-\lambda A}$$

comme $A\, e^{\lambda A} = e^{\lambda A}\, A$ puisque il s'agit de même opérateur, on écrit alors :

$$\frac{dF}{d\lambda} = e^{\lambda A}\, AB\, e^{-\lambda A} - e^{\lambda A}\, BA\, e^{-\lambda A} = e^{\lambda A}(AB - BA)e^{-\lambda A} = e^{\lambda A}[A, B]e^{-\lambda A}$$

de la même façon, on obtient la dérivée seconde :

$$\frac{d^2F}{d\lambda^2} = A\, e^{\lambda A}(AB - BA)\, e^{-\lambda A} - e^{\lambda A}(AB - BA)\, A\, e^{-\lambda A} = e^{\lambda A}\Big[A, [AB - BA]\Big]e^{-\lambda A}$$

et etc pour les ordres supérieurs. Finalement :

$$F(\lambda = 1) = e^{A}\, B\, e^{-A} = \sum_n \frac{1}{n!}\left(\frac{d^nF}{d\lambda^n}\right)\Big|_{\lambda=0} = B + \frac{1}{1!}[A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \ldots$$

Solution 5: *Equation aux valeurs propres* **(facultatif)**

Soit $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$ une base orthonormée de l'espace des des états à deux dimensions, et soit le ket $|\Psi\rangle$ défini par :

$$|\Psi\rangle = |u_1\rangle + i|u_2\rangle$$

1) **a) Montrons que $|\Psi\rangle$ n'est pas normé à l'unité**
On a

$$\begin{aligned}
\langle\Psi|\Psi\rangle &= \big(\langle u_1| - i\,\langle u_2|\big)\big(|u_1\rangle + i\,|u_2\rangle\big) \\
&= \underbrace{\langle u_1|u_1\rangle}_{=1} + i\,\underbrace{\langle u_1|u_2\rangle}_{=0} - i\,\underbrace{\langle u_2|u_1\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle u_2|u_2\rangle}_{=1} \\
&= 1 + 1 = 2 \neq 1
\end{aligned}$$

b) Définition à partir de $|\Psi\rangle$ un ket normé à l'unité que l'on note $|\Phi\rangle$
Soit

$$|\Phi\rangle = \frac{|\Psi\rangle}{\sqrt{\langle\Psi|\Psi\rangle}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\big[\,|u_1\rangle + i\,|u_2\rangle\,\big]$$

2) **La matrice représentant l'opérateur projecteur, noté K, sur le ket $|\Phi\rangle$,**
Soit $\mathbf{K} = P_{\Phi} = |\Phi\rangle\,\langle\Phi|$. Calculons les entrées de la matrice qui représente **K**. En fait :

- $\mathbf{K}\,|u_1\rangle = |\Phi\rangle\,\langle\Phi|u_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\Phi\rangle = \frac{1}{2}\big[\,|u_1\rangle + i\,|u_2\rangle\,\big]$
- $\mathbf{K}\,|u_2\rangle = |\Phi\rangle\,\langle\Phi|u_2\rangle = -i\frac{1}{\sqrt{2}}\,|\Phi\rangle = -\frac{1}{2}\big[\,i\,|u_1\rangle + |u_2\rangle\,\big]$

finalement

$$\widehat{K} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

Les éléments diagonaux de cette matrice sont réels tandis que ceux off-diagonaux sont symétriques conjugués, donc : $\mathbf{K}^{\dagger} = (\mathbf{K}^{T})^{*} = \mathbf{K} \implies \mathbf{K}$ est hermitique

3) **Calcul des valeurs propres de K** on calcul

$$det(\widehat{K} - \lambda\mathbb{I}_{2\times 2}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = (\frac{1}{2} - \lambda)^2 - \frac{1}{4} = (\frac{1}{2} - \lambda - \frac{1}{2})(\frac{1}{2} - \lambda + \frac{1}{2}) = 0$$

donc les valeurs propres sont $\lambda = 0$ (simple) et $\lambda = 1$ (simple).

Calcul des vecteurs propres, $|\phi_1\rangle$ et $|\phi_2\rangle$, de K

Soit, en général, $|\phi\rangle = \alpha\,|u_1\rangle + \beta\,|u_2\rangle$ un vecteur propre de $\mathbf{K}$ associé à la valeur propre λ, cela vaut dire que

$$\widehat{K}\,|\phi\rangle = \lambda\,|\phi\rangle \iff \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha - i\beta) = \lambda\alpha \\ \frac{1}{2}(i\alpha + \beta) = \lambda\beta \end{cases}$$

- pour $\lambda = 0$ on trouve $\alpha = i\beta$

$$\implies |\phi_1\rangle = i\beta\,|u_1\rangle + \beta\,|u_2\rangle$$

  $|\phi_1\rangle$ est normé, cela donne : $\langle\phi_1|\phi_1\rangle = 2|\beta|^2 = 1 \implies \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ à un facteur près. Finalement, on écrit :

$$\boxed{|\phi_1\rangle = i\frac{1}{\sqrt{2}}\,|u_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|u_2\rangle}$$

- pour $\lambda = 1$ on trouve $\beta = i\alpha$

$$\implies |\phi_2\rangle = \alpha\,|u_1\rangle + i\alpha\,|u_2\rangle$$

  $|\phi_2\rangle$ est normé, cela donne : $\langle\phi_2|\phi_2\rangle = 2|\alpha|^2 = 1 \implies \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ à un facteur près. Finalement, on écrit :

$$\boxed{|\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|u_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}\,|u_2\rangle}$$

4) **Relation d'orthonormalisation et de fermeture.**

C'est facile de montrer que

$$\langle\phi_1|\phi_2\rangle = \Big(-i\frac{1}{\sqrt{2}}\,\langle u_1| + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\langle u_2|\Big)\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\,|u_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}\,|u_2\rangle\Big) = 0$$

donc les deux vecteurs propres vérifient la relation d'orthogonalisation.

d'autre part on a :

$$|\phi_1\rangle\langle\phi_1| = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$|\phi_2\rangle\langle\phi_2| = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-i}{2} \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

et donc

$$|\phi_1\rangle\langle\phi_1| + |\phi_2\rangle\langle\phi_2| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_{2\times 2}$$

et c'est la relation de fermeture.

5) On considère un opérateur **A** représenté, dans la base $\{|u_i\rangle\}$, par la matrice : $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. comme précédemment pour le calcul des V_p et $\vec{V}_p$, on trouve pour cette matrice :

$$\begin{cases} \lambda = 1 \longrightarrow |\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|u_1\rangle - |u_2\rangle] \\ \lambda = 3 \longrightarrow |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|u_1\rangle + |u_2\rangle] \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} |u_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle] \\ |u_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\psi_2\rangle - |\psi_1\rangle] \end{cases} \qquad (*)$$

a) La matrice représentant l'opérateur $\sqrt{\mathbf{A}}$

D'après le passage en haut, on peut représenter les opérateurs **A** et $\sqrt{\mathbf{A}}$ dans la base propre de **A** comme suit :

$$\widehat{A} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} |\psi_1\rangle & |\psi_2\rangle \end{array} \\ \begin{array}{c} \langle\psi_1| \\ \langle\psi_2| \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \Longrightarrow (\sqrt{A}) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} |\psi_1\rangle & |\psi_2\rangle \end{array} \\ \begin{array}{c} \langle\psi_1| \\ \langle\psi_2| \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \end{array}$$

Alors que dans la base $\{|u_i\rangle\}$, il est indispensable de passer par la définition de $V_p \leftrightarrow \vec{V}_p$, c'est-à-dire : $\sqrt{\mathbf{A}}\,|\psi_1\rangle = 1\,|\psi_1\rangle$ et $\sqrt{\mathbf{A}}\,|\psi_2\rangle = \sqrt{3}\,|\psi_2\rangle$, en plus des relations de passage en $(*)$. On trouve :

$$(\sqrt{A}) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} |u_1\rangle & |u_2\rangle \end{array} \\ \begin{array}{c} \langle u_1| \\ \langle u_2| \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{2} & \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}-1}{2} & \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

On procède de la même manière pour l'opérateur $\mathbf{A}^{3/2}$