T.D. de Mécanique Quantique - SMP4
Série N°4

Exercice 1: *Système conservatif-Mesure d'une observable*

On considère un système physique dont l'espace des états à trois dimensions est rapporté à la base orthonormée $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$. L'opérateur Hamiltonien **H** du système est tel que :

$$\mathbf{H}|u_1\rangle = 2\hbar\omega|u_1\rangle; \qquad \mathbf{H}|u_2\rangle = 2\hbar\omega|u_2\rangle; \qquad \mathbf{H}|u_3\rangle = \hbar\omega|u_3\rangle$$

avec ω réel positif. Et soit **A**un opérateur hermitique agissant sur l'espace des états et est défini par:

$$\mathbf{A}|u_1\rangle = a|u_2\rangle; \qquad \mathbf{A}|u_2\rangle = b|u_1\rangle; \qquad \mathbf{A}|u_3\rangle = 2a|u_3\rangle$$

avec a réel positif.
À $t = 0$, le système est décrit par le ket:

$$|\Psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|u_1\rangle - \frac{i}{\sqrt{3}}|u_2\rangle + \frac{i}{\sqrt{3}}|u_3\rangle$$

1) Déterminer les valeurs propres, notées λ_k et les vecteurs propres, notés $|\phi_k\rangle$ de **A**.
2) Quelles valeurs peut-on trouver et avec quelles probabilités lorsqu'on mesure l'énergie à l'instant $t = 0$?
3) Déterminer le ket $|\Psi(t)\rangle$ décrivant l'état du système à un instant t ultérieur ? $|\Psi(t)\rangle$ et $|\Psi(t=0)\rangle$ décrivent-ils des états physiquement indiscernables ? Justifier votre réponse.
4) *a*) À l'instant t, on mesure l'énergie, quels sont les résultats de la mesure et leur probabilités.
   b) Même question pour la grandeur représentée par **A**.
   c) Quelle est la probabilité de trouver le système à l'instant t dans l'état décrit par $|u_3\rangle$.
5) On suppose que le résultat d'une mesure de l'énergie à un instant t donne $2\hbar\omega$. Quel est l'état du système immédiatement après cette mesure ?
6) La grandeur représentée par **A** est-elle une constante de mouvement. Justifier votre réponse.

Exercice 2: *Système conservatif*

On considère un système conservatif de masse m dont l'état quantique, à l'instant $t = 0$, est décrit par le ket :

$$|\Psi(t=0)\rangle = \frac{1}{2}|\Phi_0\rangle - \frac{i}{2\sqrt{2}}|\Phi_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|\Phi_2\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}}|\Phi_3\rangle$$

les kets $|\Phi_n\rangle$ sont des états propres de l'hamiltonien **H** du système associés aux valeurs propres E_n (donnant les énergies possibles du système) et telle que :

$$E_n = \hbar\omega\,(n + \frac{1}{2}) \qquad \text{avec n entier positif ou nul}$$

1) Quelle est la probabilité $\mathcal{P}_{t=0}$, lorsqu'on mesure l'énergie du système dans $|\Psi(t=0)\rangle$, de trouver la valeur $5\hbar\omega/2$?
2) Quelle est la valeur moyenne et l'écart quadratique moyen de l'énergie du système dans l'état $|\Psi(t=0)\rangle$.
3) *a*) Calculer le vecteur d'état $|\Psi(t)\rangle$ à l'instant t.
   b) Que deviennent à l'instant t la probabilité, la valeur moyenne et l'écart quadratique moyen de l'énergie calculés précédemment? Commenter.
4) On suppose que le résultat d'une mesure de l'énergie donne $7\hbar\omega/2$. Quel est l'état du système immédiatement après la mesure? Que trouve-t-on si on mesure à nouveau l'énergie? et avec quelle probabilité?

Exercice 3: *Particule dans un champ électromagnétique* **(facultatif)**

Partie 1 :
Dans un champ magnétique $\vec{\mathcal{B}}$ (indépendant du temps) dérivant d'un potentiel vecteur $\vec{\mathcal{A}}$ représentés respectivement par le observables $\vec{B}$ et $\vec{A}$, l'hamiltonien d'une particule de masse m et de charge q s'écrit :

$$\mathbf{H}(\vec{\mathbf{R}},\vec{\mathbf{P}}) = \frac{1}{2m}\left[\vec{\mathbf{P}} - q\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{R}})\right]^2$$

Dans un tel champ, on sait que l'observable impulsion $\vec{\mathbf{P}}$ est reliée à l'observable vitesse $\vec{\mathbf{V}}$ par la relation : $\vec{\mathbf{P}} = m\vec{\mathbf{V}} + q\vec{\mathbf{A}}$. Pour simplifier, nous supposons que $\vec{\mathcal{B}}$ est unifonne et parallèle à l'axe Oz d'un repère cartésien Oxyz de telle sorte que les composantes de l'observable $\vec{\mathbf{A}}$, s'écrivent : $\mathbf{A}_x = 0$, $\mathbf{A}_y = B.\mathbf{X}$ et $\mathbf{A}_z = 0$.

1) Calculer les commutateurs : $[\mathbf{V}_x, \mathbf{V}_y]$, $[\mathbf{V}_y, \mathbf{V}_z]$, $[\mathbf{V}_z, \mathbf{V}_x]$. Puis les commutateurs : $[\mathbf{R}_\alpha, \mathbf{V}_\alpha]$ avec $\alpha = x, y, z$.
2) Rappeler le théorème de Heisenberg et montrer que $\Delta\alpha.\Delta\mathbf{V}_\alpha \geq \hbar/(2m)$; $(\alpha = x, y, z)$. Interpréter.
3) En utilisant un résultat du cours que l'on précisera, calculer :

$a)$ $\dfrac{d\langle\vec{r}\rangle}{dt}$; Commenter

$b)$ $m\dfrac{d\langle\vec{v}\rangle}{dt}$; En déduire la relation vectorielle entre $\langle\vec{v}\rangle$ et $\vec{\mathcal{B}}$ Commenter

Partie 2 :
On considère maintenant que la particule, en plus du champ magnétique $\vec{\mathcal{B}}$, est soumise à un champ électrique $\vec{\mathcal{E}}$.
En mécanique classique, la grandeur $\mathcal{H}$, fonction de Hamilton, associée à l'énergie de la particule s'écrit :

$$\mathcal{H}(\vec{\mathbf{r}},\vec{\mathbf{p}},t) = \frac{1}{2m}\left[\vec{\mathbf{p}} - q\vec{\mathcal{A}}(\vec{\mathbf{r}},t)\right]^2 + q\,\mathcal{U}(\vec{\mathbf{r}},t)$$

où $\vec{p}$ est l'impulsion et $\vec{r}$ la position de la particule. $\vec{\mathcal{A}}$ et $\mathcal{U}$ sont les potentiels vecteur et scalaire dont dérivent $\vec{\mathcal{B}}$ et $\vec{\mathcal{E}}$ respectivement.

1) Écrire l'observable H représentant la grandeur $\mathcal{H}$.
2) Écrire l'équation de Schrödinger en représentation position