Année Universitaire 2021-2022
20 Juin 2022
Session de Rattrapage

Université Ibn Zohr
Faculté des Sciences d'Agadir
Département de Physique

Examen de Mécanique Quantique I - SMP4

DURÉE 2H00 - AUCUN DOCUMENT N'EST AUTORISÉ
N. B. : TOUTE RÉPONSE NON DÉMONTRÉE OU NON JUSTIFIÉE NE SERA PAS NOTÉE !

Questions de cours (6 pts)

1. Rappeler les **hypothèses de Bohr** utilisées pour expliquer le spectre de l'atome d'hydrogène.
2. Dans le modèle de Bohr, l'énergie obtenue pour un hydrogénoïde de numéro atomique Z a pour expression :

$$\mathrm{E}_n = \frac{\mathrm{Z}^2.\mathrm{E}_\mathrm{I}}{n^2} \quad \text{avec} \quad \mathrm{E}_I = -13.6\,\mathrm{eV} \quad \text{et} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

   (a) Faire application pour l'électron de l'ion lithium Li^{2+} dans son état fondamental et son 1^{er} état excité.
   (b) Calculer la longueur d'onde (en Å) mise en jeu entre ces états.
   On donne : Z(Li)=3 et $hc = 12400\,\mathrm{eV.Å}$

3. Soit $\psi(\vec{r},t)$ la fonction d'onde décrivant une particule de masse m se déplaçant sous l'action d'un potentiel réel $V(\vec{r},t)$. Donner l'**équation de Schrödinger dépendante du temps** satisfaite par $\psi(\vec{r},t)$.
4. Soient X et D_x les opérateurs "**multiplication par x**" et "**dérivation par rapport à x**", respectivement. Calculer le commutateur $[\mathrm{X}, \mathrm{D}_x]$.
5. Montrer que si C et D deux observables qui **commutent** et si $|\phi_1\rangle$ et $|\phi_2\rangle$ sont des kets propres de C associés à deux valeurs propres différentes λ_1 et λ_2, alors l'élément de matrice $\langle\phi_1|\,\mathrm{D}\,|\phi_2\rangle$ est nul.

Problème (14 pts)

On considère un système physique dont l'espace des états à trois dimensions est rapporté à la base orthonormée $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$, dans laquelle deux opérateurs L_x et L_y sont définis par :

$$\mathrm{L}_x|u_1\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}|u_2\rangle \qquad \mathrm{L}_x|u_2\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}(|u_1\rangle + |u_3\rangle) \qquad \mathrm{L}_x|u_3\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}|u_2\rangle$$

$$\mathrm{L}_y|u_1\rangle = i\frac{\hbar}{\sqrt{2}}|u_2\rangle \qquad \mathrm{L}_y|u_2\rangle = -i\frac{\hbar}{\sqrt{2}}(|u_1\rangle - |u_3\rangle) \qquad \mathrm{L}_y|u_3\rangle = -i\frac{\hbar}{\sqrt{2}}|u_2\rangle$$

L'**hamiltonien** H du système est donné par :

$$\mathsf{H} = \frac{\omega}{\hbar}\,(\mathsf{L}_x^2 - \mathsf{L}_y^2)$$

où ω est une constante réelle positive

1. (a) Écrire les matrices associées aux opérateurs L_x et L_y dans la base $\{|u_k\rangle\}$ (k=1,2,3).
   (b) Vérifier que ces opérateurs sont hermitiques.
   (c) En déduire que l'opérateur H est défini, sur la base $\{|u_k\rangle\}$, par :

   $$\mathsf{H}\,|u_1\rangle = \hbar\omega\,|u_3\rangle \quad , \quad \mathsf{H}\,|u_2\rangle = 0 \quad , \quad \mathsf{H}\,|u_3\rangle = \hbar\omega\,|u_1\rangle$$

   (d) Déterminer les valeurs propres (énergies E_k) et les états propres normés $|\phi_k\rangle$ du système (on supprimera tout facteur de phase n'ayant pas de sens physique).

2. On considère maintenant l'opérateur L_z représenté, dans la base $\{|u_k\rangle\}$, par la matrice :

   $$(\mathsf{L}_z) = \hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   Montrer que L_z est une observable.

3. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(0)\rangle = |u_1\rangle$
   (a) On mesure à cet instant la grandeur physique $\mathscr{L}_z$ représentée par L_z. Quels résultats peut-on trouver et avec quelles probabilités ?
   (b) On suppose qu'on mesure l'observable L_z^2. Quelle est la probabilité d'obtenir comme résultat la valeur $\hbar^2$.
   (c) Si le résultat est bien $\hbar^2$, quel sera l'état du système juste après la mesure ?

4. (a) Donner l'expression de l'opérateur d'évolution $U(t,0)$ dans ce cas.
   (b) En déduire le ket $|\psi(t)\rangle$ décrivant l'état du système à un instant t ultérieur? $|\psi(t)\rangle$ et $|\psi(0)\rangle$ décrivent-ils des états physiquement indiscernables? Justifier votre réponse.
   (c) Exprimer $|\psi(t)\rangle$ en fonction des kets $\{|u_k\rangle\}$ et calculer, à l'instant t, les probabilités des différents résultats de mesure de $\mathscr{L}_z$.
   Tracer ces probabilités dans l'intervalle $[t = 0, t = \pi/\omega]$; commenter.
   (d) Calculer, dans l'état $|\psi(t)\rangle$, les valeurs moyennes $\langle \mathsf{L}_x\rangle_t$, $\langle \mathsf{L}_y\rangle_t$ et $\langle \mathsf{L}_z\rangle_t$. Quel est le mouvement effectué par le vecteur $\langle \vec{\mathscr{L}}\rangle_t$