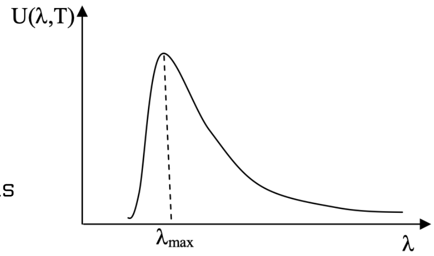
T.D. de Mécanique Quantique - SMP4
Série N°1

Exercice 1: *Concept de la 1st quantification*

Les résultats **expérimentaux** obtenus pour un corps noir (figure ci-contre) sont régis par les deux lois empiriques :
i) Loi de Stefan : $\int_0^\infty u(\lambda, T)d\lambda = aT^4$
ii) Loi de déplacement de Wien : $\lambda_{max}.T = cte$.
On demande de calculer :



1) Donner une interprétation de ces deux lois.
2) Pour un tel système, la théorie classique de Rayleigh-Jeans conduit à :
$$u_{R.J}(\nu, T) = u(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3}\, k_B\, T\, \nu^2$$
   a) Écrire $u(\lambda, T)$ et donner son allure.
   b) Cette théorie est-elle en accord avec l'expérience? Pourquoi ?
   c) Expliquer ce que l'on entend par 'catastrophe ultraviolette'.
3) Planck a établi la formule suivante donnant la densité u :
$$u_{Planck}(\nu, T) = u(\nu, T) = \frac{8\pi\, h}{c^3}.\frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$
Trouver son accord avec l'expérience.
4) On veut retrouver la loi empirique de déplacement de Wien
   a) Écrire la formule de Planck en termes de λ: $u(\lambda, T)$.
   b) Dterminer λ_{max} sachant que l'équation : $(1 - e^{-x}) = x/5$ peut être résolue graphiquement; soit : $x = x_{max} = 4,97$. En déduire la loi de Wien.
   c) Estimer la température du soleil sachant que la maximum d'intensité du spectre solaire correspond à $\lambda_{max} = 0,55\mu m$. Commenter.

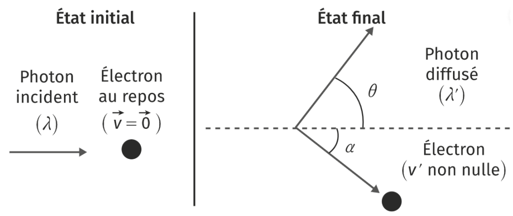
Exercice 2: *Effet Photo-Électrique (Introduction du concept de photon)*

1) Rappeler et interpréter la relation d'Einstein donnant le bilan énergétique de l'absorption du photon par un métal.
2) Soit une substance métallique quelconque,
   a) Cette substance est éclairée par la lumière visible (0,4-0,75) $[\mu m]$ ne produit aucun courant électrique. Que peut-on dire de son travail de sortie?.
   b) On recouvre la substance par du zinc dont le travail de sortie est $W_s = 3,4$ eV puis on l'éclaire avec une radiation de longueur d'onde $\lambda = 0,2\mu m$. Donner la longueur d'onde et la fréquence du seuil photoélectrique. Quelle est la vitesse maximale des photoélectrons arrachés.
   c) Mêmes questions pour le césium dont le travail de sortie est $W_s = 1,8$.
   d) Comparer les résultats b) et c) et conclure.
3) Les potentiels d'arrêt mesurés au cours d'une expérience photoélectrique menée avec un émetteur au calcium sont les suivants :

λ(Å)	2536	3132	3650	4047
V_0 (Volt)	1,95	0,98	0,5	0,14

   a) Déterminer la valeur de la constante de Planck.
   b) Déterminer le travail de sortie de l'émetteur.

Exercice 3: *Effet Compton*



On envoie un faisceau de rayons X de fréquence ν et de longueur d'onde $\lambda = c/\nu$ sur une cible très mince (on suppose pour simplifier les choses un électron lié à un atome de la cible, dont l'énergie négligeable -quelques eV- devant celle du photon incident, et on peut considérer que la vitesse initiale de l'électron est nulle $\vec{v} = 0$). On observe les rayons diffusés dans une direction faisant l'angle θ avec la direction Ox du faisceau incident. On constate que la longueur d'onde λ' des photons diffusés est supérieure à λ et que cette longueur d'onde est fonction de l'angle d'observation suivant la relation :

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m\,c}(1-\cos\theta) \qquad (*)$$

1) Interpréter la relation $(*)$ qui régit l'effet Compton.
2) Montrer que la relation entre l'angle de diffusion du photon et l'angle de diffusion de l'électron est telle que :

$$\cot\alpha = \left[1+\frac{h\nu}{m\,c^2}\right]\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

3) Montrer que l'énergie cinétique maximale transférée à l'électron après diffusion est :

$$E_c^{max} = \frac{h\nu}{1+\frac{mc^2}{2h\nu}}$$

4) Un rayon X de longueur d'onde 0.300Å subit une diffusion Compton à $60°$. Quelles sont, après diffusion, la longueur d'onde du photon et l'énergie cinétique de l'électron.
5) Un électron frappé par un rayon X de 0.5 MeV acquiert une énergie de 0.1 MeV.
   a) Calculer la longueur d'onde du photon diffusé sachant que l'électron était initialement au repos.
   b) Calculer l'angle que fait le photon diffusé avec le photon incident.

On donne : $h/m/c = 0.024$ Å ($= \lambda_C$ dite longueur d'onde de compton).

Exercice 4: *Traitement classique ou quantique*

1) Par analogie avec le critère de la relativité basé sur la constante c (vitesse de la lumière), on a utilisé un critère relatif à la constante h de Planck. Rappeler ce critère et donner les dimensions de h.
2) Applications : Dans chacun des exemples suivants, préciser si l'on a (ou pas) recours à la théorie quantique :
   a) Une montre à ressort possédant des parties mobiles de taille et de masse typiques : $d = 0.1\,mm$ et $m = 0.1\,mg$ et un temps typique $t = 1\,s$.
   b) Un noyau dont l'énergie de liaison (neutron ou proton) est typiquement de l'ordre de 8 MeV; la dimension caractéristique du noyau se situe autour de $r = 1\,fm$ $(1fm = 10^{-15}\,m)$ tandis que la masse d'un nucléon vaut $1.6.10^{-27}$ Kg.
3) Utiliser la relation de Louis De Broglie et réécrire le critère ci-dessous pour un système d'atomes distants de a. Faire application pour un faisceau monocinétique d'électrons d'énergie $100\,eV$ qui rencontre un cristal de paramètre de réseau de 1 Å.

Exercice 5: *Quantification de l'énergie : Modèle de Bohr pour un hydrogénoïde*

Un hydrogénoïde est un atome constitué d'un électron (masse m et charge $-e$) et d'un noyau de masse $M \gg m$ et de charge $+Ze$. On suppose que l'électron décrit un cercle de rayon r autour du noyau supposé fixe

1) Montrer que l'énergie totale de l'hydrogénoïde s'écrit : $E = -\frac{Z e^2}{8\pi\epsilon_0}$. Quelle est la signification d'une énergie totale nulle ?
2) Quelle résultat obtient-on par application de la théorie classique ?
3) On tient compte des deux hypothèses suivantes (hypothèses de Bohr) :

   $i-$ Les seules orbites permises pour l'électron sont celles pour lesquelles le moment cinétique $\vec{L}$ satisfait à la relation : $\left\|\vec{L}\right\| = n\hbar$ où n est un entier ≥ 1 et $\hbar = h/2$ (h étant la constante de Planck).

   $ii-$ L'électron rayonne de l'énergie seulement lorsqu'il saute d'une orbite caractérisée par une énergie E_n à une autre orbite d'énergie E_p plus petite. La fréquence ν_{np} d'émission est telle que : $h\nu_{np} = E_n - E_p$

   $a)$ Établir l'expression du rayon des orbites permises ainsi que leurs énergies correspondantes.

   $b)$ Montrer que les longueurs d'onde $\lambda_{n\to p}$ d'émission vérifient la relation suivante :

$$\frac{1}{\lambda_{n\to p}} = Z^2 R_H \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad \text{où } R_H \text{ est la constante de Rydberg pour l'Hydrogène.}$$

   Exprimer littéralement, puis numériquement la constante R_H.

   $c)$ Donner les séries associées aux valeurs de p et n et faire un diagramme.

Exercice 6: *Atome d'hydrogène (facultatif)*

La fonction d'onde décrivant l'état fondamental de l'électron de l'atome d'hydrogène s'écrit, en coordonnées sphériques : $\psi(r) = C\, e^{-\frac{r}{a}}$, où C est une constante réelle et positive et a est le rayon de l'orbite de Bohr : $a = 0.53 \times 10^{-10}\, m$.

1) Calculer la constante C.
2) Calculer la densité de probabilité de présence de l'électron et tracer son allure.
3) Calculer la probabilité de trouver l'électron entre les deux sphères de rayons r et $r + dr$. Pour quelle valeur de r, cette probabilité est-elle maximale ?

Exercice 7: *Paquet d'ondes gaussien (facultatif)*

Une particule libre de masse m, d'impulsion $p = \hbar k$ et d'énergie E décrite par le paquet d'ondes $\psi(x,t)$ à une dimension :

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int g(k)\, e^{i(kx-\omega t)} dk$$

1) Trouver la relation entre E et k. En déduire la relation de dispersion $\omega(k)$.
2) On considère le paquet d'ondes à l'instant initial : $\psi(x, t = 0) = \psi(x)$.

   a) Montrer que $g(k)$ n'est autre que la transformée de Fourier de $\psi(x)$.

   b) Établir l'égalité de Parseval Plancherel :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(k)|^2 dk$$

On suppose par la suite que la fonction est une gaussienne centrée en k_0 :

$$g(k) = \left(\frac{a^2}{2\pi}\right)^{1/4} exp\Big(-\frac{a^2}{4}(k-k_0)^2\Big)$$

où a est une constante ayant la dimension d'une longueur.

3) Paquet d'ondes à l'instant $t = 0$:

   a) Montrer que $\psi(x,0)$ est donnée par : $\psi(x,0) = \left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{1/4} e^{ik_0 x} e^{-\frac{x^2}{a^2}}$

   b) On définit le centre du paquet d'ondes par le point x_M où $|\psi(x,0)|^2$ est maximale; donner la position du centre du paquet d'ondes.

   c) Montrer que la probabilité de trouver la particule dans tout l'espace est égale à 1.

   d) On définit la largeur Δy d'une gaussienne $f(y) = exp(-y^2/b^2)$ par $\Delta y = b/\sqrt{2}$. Déterminer les largeurs $\Delta x(0)$ de $|\psi(x,0)|^2$ et $\Delta k(0)$ de $|g(k)|^2$. En déduire que le paquet d'ondes $\psi(x,0)$ obéit à la relation d'incertitude d'Heisenberg.

4) Evolution du paquet d'ondes $\psi(x,t)$ dans le temps :

A l'instant $t > 0$, l'expression du paquet d'ondes $\psi(x,t)$ est de la forme (à ne pas démontrer) :

$$\psi(x,t) = \left(\frac{2a^2}{\pi}\right)^{1/4} \frac{e^{i\phi}.e^{ik_0 x}}{\left(a^4 + \frac{4\hbar^2 t^2}{m^2}\right)^{1/4}} exp\left[-\frac{\left(x - \frac{\hbar k_0}{m}t\right)}{a^2 + \frac{2i\hbar t}{m}}\right]$$

   a) Calculer la densité de probabilité $|\psi(x,t)|^2$ associée à la particule à l'instant t.

   b) Déterminer la position $x_M(t)$ du centre du paquet d'ondes à l'instant t. Quelle est sa vitesse de déplacement ? La comparer à la vitesse de groupe associée au paquet.

   c) Déterminer la largeur $\Delta x(t)$ et l'amplitude $A(t)$ de $|\psi(x,t)|^2$. Décrire qualitativement la variation de ces deux grandeurs en fonction du temps. Conclure quant à l'évolution de la forme de la densité de probabilité au cours du temps.

Données

On donne :

- $I = \int_{-\infty}^{+\infty} exp(-\alpha^2 y^2 + \beta y)dy = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^2}}\, exp(\frac{\beta^2}{4\alpha^2})$
- $\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$
- Solution de l'équation : $5 - x = 5e^{-x}$ est $x \approx 4.965$
- $m_e = 9.109 \times 10^{-31}$ Kg
- $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J.s
- $c = 3 \times 10^8$ m/s
- $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ SI