T.D. de Mécanique Quantique - SMP4
Série N°3

Exercice 1: *Opérateur, commutateur et adjoint*

1) Soient **A**, **B** et **C** des opérateurs linéaires. Montrer que :

a) $[\mathbf{A}, \mathbf{B}+\mathbf{C}] = [\mathbf{A}, \mathbf{B}] + [\mathbf{A}, \mathbf{C}]$

b) $[\mathbf{A}, \mathbf{BC}] = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{C} + \mathbf{B}[\mathbf{A}, \mathbf{C}]$

c) En déduire que $[\mathbf{A}, \mathbf{B}^n] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{B}^i [\mathbf{A}, \mathbf{B}] \mathbf{B}^{n-i-1}$

d) $[\mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}]] + [\mathbf{B}, [\mathbf{C}, \mathbf{A}]] + [\mathbf{C}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] = 0$ (Identité de Jacobi)

2) Soit **A** un opérateur quelconque non hermitique. Discuter l'hermiticité des opérateurs suivant :

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^{\dagger}, \quad \mathbf{C} = i\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\dagger}\right) \quad \text{et} \quad \mathbf{D} = i\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\dagger}\right)$$

3) Montrer qu'opérateur **F** quelconque peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} + i\,\mathbf{B}$$

où **A** et **B** sont deux opérateurs hérmitiques.

4) Montrer que :
   - si **A** est hermitique alors $\langle\psi|\,\mathbf{A}\,|\psi\rangle \in \mathbb{R}$
   - si $\mathbf{A}^{\dagger} = -\mathbf{A}$ alors $\langle\psi|\,\mathbf{A}\,|\psi\rangle$ est un imaginaire pur.

Exercice 2: *Représentation matricielle d'un opérateur - ECOC*

On considère un espace des états muni de la base orthonormée $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$, l'hamiltonien **H** et deux opérateur **A** et **B** sont représentés dans cette base par :

$$\widehat{H} = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = a\left(i\,|u_1\rangle\langle u_2| - i\,|u_2\rangle\langle u_1|\,\right), \text{ et } \mathbf{B} \text{ tel que } \begin{cases} \mathbf{B}\,|u_1\rangle = b\,|u_3\rangle \\ \mathbf{B}\,|u_2\rangle = b\,|u_2\rangle \\ \mathbf{B}\,|u_3\rangle = b\,|u_1\rangle \end{cases}$$

où ω est la pulsation, alors que a et b sont deux nombres réels.

1) Écrire l'hamiltonien **H** sous la forme d'une combinaison linéaire des opérateurs $|u_i\rangle\langle u_j|$ avec $i = 1, 2, 3$ et $j = 1, 2, 3$.
2) Représenter sous forme matricielle les opérateurs **A** et **B** dans la base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$.
3) Calculer les commutateurs $[\mathbf{A}, \mathbf{H}]$, $[\mathbf{B}, \mathbf{H}]$ et $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$.
4) **A** et **B** sont-ils hermitiques ?
5) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de **A**.
6) Déterminer les vecteurs propres et les valeurs propres de **B**.
7) **A** et **B** sont-ils des observables.
8) Parmi les ensembles suivants $\{\mathbf{A}\}$, $\{\mathbf{B}\}$, $\{\mathbf{H}\}$, $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$, $\{\mathbf{A}, \mathbf{H}\}$, $\{\mathbf{B}, \mathbf{H}\}$ les quels forment un ECOC.

Exercice 3: *Equation aux valeurs propres* **(facultatif)**

Soit $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$ une base orthonormée de l'espace des des états à deux dimensions et on considère un ket $|\Psi\rangle$ défini par :

$$|\Psi\rangle = |u_1\rangle + i|u_2\rangle$$

1) **a**) Montrer que $|\Psi\rangle$ n'est pas normé à l'unité

   b) Définir à partir de $|\Psi\rangle$ un ket normé à l'unité que l'on note $|\Phi\rangle$

2) Déterminer dans la base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$, la matrice représentant l'opérateur projecteur, noté $\mathbf{K}$, sur le ket $|\Phi\rangle$, $\mathbf{K}$ est-il hermitique ?

3) Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de $\mathbf{K}$ (à un facteur de phase global près). On notera par $|\phi_1\rangle$ et $|\phi_2\rangle$ ces vecteurs propres.

4) Montrer que $|\phi_1\rangle$ et $|\phi_2\rangle$ vérifient la relation d'orthonormalisation et la relation de fermeture.

5) On considère un opérateur $\mathbf{A}$ représenté, dans la base $\{|u_i\rangle\}$, par la matrice : $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   a) Calculer dans cette base la matrice représentant l'opérateur $\sqrt{\mathbf{A}}$

   b) Meme question pour l'opérateur $\mathbf{A}^{3/2}$