Université Ibn Zohr
Faculté des Sciences d'Agadir
Département de Physique

Année Universitaire 2022-2023
19 Mai 2023
Session Normale

Examen de Mécanique Quantique I - SMP4

DURÉE 1H30 - AUCUN DOCUMENT N'EST AUTORISÉ

N. B. : TOUTE RÉPONSE NON DÉMONTRÉE OU NON JUSTIFIÉE NE SERA PAS NOTÉE !

Questions de cours (7 pts)

Soit $\psi(x,t)$ la fonction d'onde décrivant une particule de masse m se déplaçant, sous l'action d'un potentiel réel $V(x,t)$, le long de l'axe (ox).

1. Rappeler l'équation de **Schrödinger dépendante du temps** satisfaite par $\psi(x,t)$.
2. Donner la densité de probabilité $\rho(x,t)$ associée à cette fonction d'onde.
3. Le courant de probabilité, $\vec{j}(x,t)$, s'écrit dans ce cas :

$$\vec{j}(x,t) = \frac{\hbar}{2im}\left[\psi^*(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,t) - \psi(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\psi^*(x,t)\right]\vec{e}_x$$

   Démontrer l'équation de conservation :

$$\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} + \vec{\nabla}_x.\vec{j}(x,t) = 0$$

4. Pour une fréquence donnée ν, l'intensité I_{sat} du courant de saturation d'une cellule photo-électrique est proportionnelle à la puissance P du rayonnement incident atteignant la photo-cathode : $I_{sat} = \alpha P$. La constante de proportionnalité α mesure la sensibilité de la cellule et depend de la fréquence.
   (a) Exprimer α en fonction du nombre N_{ph} de photons incidents par seconde sur la photo-cathode et du nombre n_{e^-} d'électrons émis par seconde.
   (b) Trouver la valeur du rendement quantique η sachant que $\alpha = 1\,mA/W$ pour $\lambda = 0,6\mu m$.

   On donne:

$$hc = 12400\,eV.\text{Å}$$

Problème Réflexion d'électrons sur une marche de potentiel (13 pts)

Tout au long de son mouvement dans l'espace à une dimension, un faisceau d'électrons, de masse m et de charge élémentaire e, est accéléré sous une différence de potentiel (d.d.p) $U = 100V$.

1. (a) Exprimer la longueur d'onde de L. De Broglie λ associée à ces électrons en fonction de h (la constante de Planck), m, e et U.
   Faire l'application numérique. On donne:

$$h = 6,62.10^{-34} J.s, \quad m = 9.10^{-31} Kg, \quad e = 1,6.10^{-19} C$$

   (b) Ces électrons sont envoyés sur un réseau cristallin à une dimension. Sachant que la distance entre deux atomes successifs du cristal est de $d = 1\,\text{Å}$, peut-on observer une figure de diffraction ? Justifier votre réponse.

Ensuite, ce faisceau d'électrons est soumis le long de l'axe Ox (de vecteur unitaire $\vec{e}_x$) à une marche de potentiel $V(x)$ définie par :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad x \leq 0 \quad \text{(région 1)}, \\ V_0 & \text{pour} \quad x > 0 \quad \text{(région 2)}. \end{cases}$$

avec V_0 est une constante positive, et l'énergie totale E des électrons est telle que $0 < E < V_0$. On posera dans ce que suit :

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad \text{et} \quad q^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}$$

2. Tracer l'allure de l'énergie potentielle.

3. Étudier le comportement classique de la particule dans ce cas.

4. Écrire l'équation de **Schrödinger indépendante du temps** vérifiée par la fonction d'onde $\psi(x)$ et la résoudre dans chacune des deux régions. **On prendra l'amplitude de l'onde incidente égale à l'unité:** $A = 1$. Préciser la nature de chaque terme.

5. Écrire les conditions de continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée première au point $x = 0$. En déduire les amplitudes des ondes réfléchie et transmise en fonction de k et q.

6. Calculer les courants de probabilité de présence : incident $\vec{j}_i$, réfléchi $\vec{j}_r$ et transmis $\vec{j}_t$.

7. En déduire le coefficient de réflexion R de la marche de potentiel défini par $R = |\vec{j}_r|/|\vec{j}_i|$. Comparer ce résultat aux prévisions de la mécanique classique.

8. Soit σ la densité de probabilité de presence d'un électron dans la région (2).
   (a) Écrire σ en fonction de données.
   (b) Calculer σ pour $x = \frac{1}{2q}$ lorsque $V_0 = 2E$.
   (c) Dans le cas où $E = 10\,eV$ et $V_0 = 20\,eV$, à quelle profondeur a, pour que cette probabilité soit inférieure à 1%.
   Rappel:
   $mc^2 = 0.5\,MeV$, et $hc = 12400\,eV.\text{Å}$