Université Ibn Zohr
Faculté des Sciences d'Agadir
Département de Physique

Année Universitaire 2022-2023
19 Mai 2023
Session Normale

Correction de l'Examen de Méca. Quantique I - SMP4

Questions de cours (7 pts)

Soit $\psi(x,t)$ la fonction d'onde décrivant une particule de masse m se déplaçant, sous l'action d'un potentiel réel $V(x,t)$, le long de l'axe (ox).

1. L'équation de **Schrödinger dépendante du temps** satisfaite par $\psi(x,t)$ s'écrit :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \Big[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_x + V(x)\Big]\psi(x,t) \quad \text{avec} \quad \Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

1.5pt

2. **La densité de probabilité** $\rho(x,t)$ associée à cette fonction d'onde s'écrit :

$$\rho(x,t) = \psi^*(x,t).\psi(x,t) = |\psi(x,t)|^2$$

1pt

3. Démonstration de **l'équation de conservation**.
En prenant le complexe conjugué des deux membres de l'équation de Schrödinger dépendante du temps on écrit :

$$\Big[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\Big]\psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) \tag{1}$$

$$\Big[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\Big]\psi^*(x,t) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^*(x,t) \tag{2}$$

Multipliant éq.(1) par $\psi^* = \psi^*(x,t)$ et éq.(2) par $\psi = \psi(x,t)$, puis retranchant entre elles les équations ainsi obtenues, il vient :

$$\frac{i\hbar}{2m}\Big(\psi^*\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi - \psi\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi^*\Big) = \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} + \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t} = \frac{\partial(\psi^*\psi)}{\partial t} \tag{3}$$

En remarquant qu'on a l'identité :

$$\psi^*\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi - \psi\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi^* = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\Big) \tag{4}$$

le terme de gauche de l'équation (3) s'écrit :

$$\frac{i\hbar}{2m}\Big(\psi^*\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi - \psi\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi^*\Big) = -\frac{i\hbar}{2m}div\Big(\psi\frac{\partial}{\partial x}\psi^* - \psi^*\frac{\partial}{\partial x}\psi\Big) = -\frac{\hbar}{2im}div\Big(\psi^*\frac{\partial}{\partial x}\psi - \psi\frac{\partial}{\partial x}\psi^*\Big) \tag{5}$$

Notons que le courant de probabilité, $j(x,t)$, s'écrit dans ce cas :

$$j(x,t) = \frac{\hbar}{2im}\left[\psi^*(x,t)\frac{d}{dx}\psi(x,t) - \psi(x,t)\frac{d}{dx}\psi^*(x,t)\right]$$

L'équation (3) s'écrit ainsi sous forme :

$$-div\, j = \frac{\partial\left(\psi^*\psi\right)}{\partial t} \iff -\vec{\nabla}_x.\vec{j}(x,t) = \frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{6}$$

d'où l'équation de conservation :

$$\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} + \vec{\nabla}_x.\vec{j}(x,t) = 0$$ 2pt

4. Pour une fréquence donnée ν, l'intensité I_{sat} du courant de saturation d'une cellule photo-électrique est proportionnelle à la puissance P du rayonnement incident atteignant la photo-cathode : $I_{sat} = \alpha P$. La constante de proportionnalité α mesure la sensibilité de la cellule et depend de la fréquence.

   (a) Expression de α en fonction du N_{ph} et n_{e^-}
   Pour ce faire, on définit le nombre d'électrons émis par seconde, à partir de I_{sat}, par

   $$I_{sat} = n_{e^-} \times |e| \Longrightarrow n_{e^-} = \frac{I_{sat}}{|e|}$$

   et le nombre de photons incidents par seconde sur la photocathode, à partir de P, comme suit

   $$P = N_{ph} \times h\nu \Longrightarrow N_{ph} = \frac{P}{h\nu}$$

   Il s'en suit alors que:

   $$I_{sat} = \alpha P \Longrightarrow \alpha \equiv \frac{I_{sat}}{P} = \frac{n_{e^-}}{N_{ph}}.\frac{|e|}{h\nu} = \frac{n_{e^-}}{N_{ph}}.\frac{|e|}{hc}.\lambda \Longrightarrow \alpha = \frac{n_{e^-}}{N_{ph}}.\frac{|e|}{12400}.\lambda(\text{Å})$$ 1pt

   où on a remplacé $hc = 12400\,\text{eV.Å}$.

   (b) Valeur du rendement quantique η:
   Par définition, le rendement quantique mesure le rapport entre le nombre d'électrons émis et le nombre de photons incidents, c'est-à-dire :

   $$\eta = \frac{n_{e^-}}{N_{ph}} = \alpha\frac{12400}{|e|}.\frac{1}{\lambda(\text{Å})}$$ 1pt

   Application numérique :
   sachant que $\alpha = \frac{1\text{mA}}{\text{W}} = \frac{10^{-3}\text{A}}{1\text{V.1A}}$ et $\lambda = 0,6\mu m = 6000\,\text{Å}$. On trouve que:

   $$\eta = \frac{10^{-3}\text{A}}{1\text{V.1A}}\frac{12400\,\text{eV.Å}}{\text{e}}.\frac{1}{6000\,\text{Å}} \simeq 0.002$$ 0.5pt

Problème Réflexion d'électrons sur une marche de potentiel (13 pts)

Nous disposons d'un faisceau d'électrons, de masse m et de charge élémentaire e, accéléré par une différence de potentiel $U = 100V$.

1. (a) La longueur d'onde de L. De Broglie λ:
D'après la relation de L. De Broglie, la longueur d'onde s'écrit:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE_c}}, \quad \text{car l'énergie totale est purement cinétique} \quad E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

Or, l'énergie cinétique E_c des électrons accélérés sous la tension U est $E_c = eU$, donc:

0.75pt $\boxed{\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meU}}}$ **A.N** $\boxed{\lambda = 1.22\,\text{Å}}$ 0.25pt

(b) Ces électrons sont envoyés sur un réseau cristallin à une dimension où le distance interatomique dans le cristal est de $d = 1\,\text{Å}$. Dans ce cas, on peut observer une figure de diffraction, car la longueur d'onde associée aux électrons est de même ordre de grandeur que la distance séparant les atomes du cristal $(\lambda \approx d)$ 0.5pt.

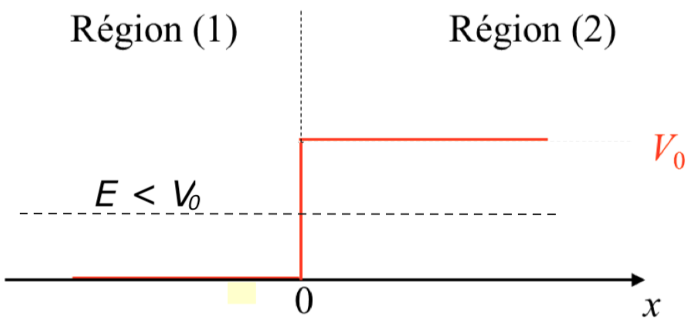
Dans ce que suit, le faisceau d'électrons est soumis le long de l'axe Ox (de vecteur unitaire $\vec{e}_x$) à une marche de potentiel $V(x)$ défini par :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad x \leq 0 \quad \text{(région 1)}, \\ V_0 & \text{pour} \quad x > 0 \quad \text{(région 2)}. \end{cases}$$

avec V_0 est une constante positive, et l'énergie totale E des électrons est telle que $0 < E < V_0$. On posera dans ce que suit :

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad \text{et} \quad q^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}$$

2. Allure de $V(x)$



0.5pt

3. Le comportement classique de la particule.
Le mouvement de la particule est tel que:

$$E = E_c + V(x) = \text{constante}$$

comme l'énergie cinétique $E_c = \frac{p^2}{2m} \geq 0$, alors le mouvement de la particule n'est possible que si:

$$E_c = E - V(x) \geq 0 \tag{7}$$

et puisque $E < V_0$, alors:

– Dans la région (1), la condition (7) est satisfaite et le mouvement de la particule est possible. 0.5pt

– Dans la région (2), on a $E < V_0$ et la condition (7) n'est pas satisfaite, et donc le mouvement de la particule est impossible. 0.5pt

Ainsi, au point $x = 0$, la particule rebrousse chemin: il y a réflexion totale.

4. Équations de Schrödinger $\psi(x)$ $\oplus$ résolution.
De manière générale, l'équation de Schrödinger indépendante de temps s'écrit

$$\psi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - V(x)\right)\psi(x) = 0$$

Dans la région (1) : $x < 0$ et $V(x) = 0$.
- L'équation de Schrödinger satisfaite par la fonction d'onde $\psi_1(x)$ est:

$$\frac{d^2\psi_1(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - 0\right)\psi_1(x) = 0$$

Soit donc

$$\boxed{\frac{d^2\psi_1(x)}{dx^2} + k^2\psi_1(x) = 0 \quad ; \qquad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} > 0}$$ 0.75pt

- La solution de cette équation est de la forme:

$$\psi_1(x) = A\,e^{ikx} + B\,e^{-ikx} = e^{ikx} + B\,e^{-ikx}$$

avec A et B tout les deux font partie de $\mathbb{C}$. De plus en prenant $A = 1$, on écrit finalement,

$$\boxed{\psi_1(x) = e^{ikx} + B\,e^{-ikx}}$$ 0.5pt

Dans la région (2) : $x > 0$ et $V(x) = V_0$.
- L'équation de Schrödinger satisfaite par la fonction d'onde $\psi_2(x)$ est:

$$\frac{d^2\psi_2(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - V_0\right)\psi_2(x) = 0$$

Soit donc

$$\boxed{\frac{d^2\psi_2(x)}{dx^2} - q^2\psi_2(x) = 0 \quad ; \qquad q^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} > 0}$$ 0.75pt

- La solution de cette équation est de la forme:

$$\psi_2(x) = C\,e^{-qx} + D\,e^{qx} \quad \text{avec} \quad C \text{ et } D \quad \text{tout les deux} \in \mathbb{C}$$

Considération asymptotique à l'infini:
Or, la fonction d'onde $\psi_2(x)$ doit etre de carre sommable, c'est-à-dire bornée vers $+\infty$, et comme l'onde $D\,e^{qx}$ diverge quand x tend vers $+\infty$, l'amplitude D doit etre nulle.
l'expression de $\psi_2(x)$ devient alors:

$$\boxed{\psi_2(x) = C\,e^{-qx}}$$ 0.5pt

5. Conditions de continuité de ψ et ψ' au point $x=0$.
ces conditions s'écrivent au point $x=0$ comme suit:

$$\begin{cases}\psi_1(0)=\psi_2(0)\\ \psi_1'(0)=\psi_2'(0)\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}1+B=C & (i)\\ ik(1-B)=-qC & (ii)\end{cases} \tag{8}$$

Déduction
effectuons $ik\times(i)+(ii)$ et $q\times(i)+(ii)$, on trouve:

0.75pt $\boxed{B=-\dfrac{q+ik}{q-ik}}$; $\boxed{C=-\dfrac{2ik}{q-ik}}$ 0.75pt

6. Courants de probabilité $\vec{j}_i$, $\vec{j}_r$ et $\vec{j}_t$
le courant incident:

$$\psi_{1i}(x)=e^{ikx} \Longrightarrow \vec{j}_i(x,t)=\frac{\hbar}{2im}\left[e^{-ikx}(ik)e^{ikx}-e^{ikx}(-ik)e^{-ikx}\right]\vec{e}_x=\frac{\hbar}{2im}2ik\,\vec{e}_x$$

donc

$$\boxed{\vec{j}_i(x,t)=\frac{\hbar k}{m}\vec{e}_x}$$ 0.75pt

le courant réfléchi:

$$\psi_{1r}(x)=Be^{-ikx} \Longrightarrow \vec{j}_r(x,t)=\frac{\hbar}{2im}\left[B^*e^{ikx}(-ik)\,Be^{-ikx}-Be^{-ikx}(ik)\,B^*e^{ikx}\right]\vec{e}_x=\frac{\hbar}{2im}2(-ik)\,|B|^2\,\vec{e}_x$$

donc

$$\boxed{\vec{j}_r(x,t)=-\frac{\hbar k}{m}|B|^2\,\vec{e}_x}$$ 0.75pt

le courant transmis:

$$\begin{aligned}\psi_{2t}(x)=Ce^{-qx} \Longrightarrow \vec{j}_t(x,t) &= \frac{\hbar}{2im}\left[C^*e^{-qx}(-q)\,Ce^{-qx}-Ce^{-qx}(-q)\,C^*e^{-qx}\right]\vec{e}_x\\ \vec{j}_t(x,t) &= \frac{\hbar}{2im}q(-1+1)e^{-qx}\,|C|^2\,\vec{e}_x\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\vec{j}_t(x,t)=\vec{0}}$$ 0.75pt

7. Déduction: coefficient de réflexion R de la marche de potentiel.
Ètant défini par $R=|\vec{j}_r|/|\vec{j}_i|$, on écrit:

$$R=\left|\frac{\vec{j}_r}{\vec{j}_i}\right| \Longrightarrow R=|B|^2=\left|\frac{q+ik}{q-ik}\right|^2=1$$ 0.75pt

Comparaison:
Comme $R=1$, l'onde incidente se retrouve alors **totalement réfléchie**, conformément au cas classique. 0.5pt

8. Soit σ la densité de probabilité de presence d'un électron dans la région (2).

   (a) $\sigma = f(\text{données})$
   En terme du fonction d'onde dans la région (2), cette densité σ s'écrit:

$$\sigma = |\psi_2(x)|^2 = |C|^2 e^{-2qx} \quad \text{avec} \quad C = -\frac{2ik}{q-ik}$$

   donc

$$\sigma = |\psi_2(x)|^2 = \frac{4k^2}{k^2+q^2} e^{-2qx} \quad \text{avec} \quad \frac{k^2}{k^2+q^2} = \frac{E}{V_0}$$

   finalement,

$$\boxed{\sigma = \frac{4E}{V_0} e^{-2qx}} \qquad 1\text{pt}$$

   (b) Calculer de σ
   pour $x = \frac{1}{2q}$ lorsque $V_0 = 2E$ on trouve

$$\sigma = \frac{4E}{2E} e^{-2q\frac{1}{2q}} = \frac{2}{e} \quad \text{soit} \quad \sigma = 0.73 \qquad 0.5\text{pt}$$

   (c) Profondeur a
   Supposons que cette probabilité soit inférieure à 1%, cela signifie que

$$\begin{aligned} \sigma &= |\psi_2(a)|^2 \leq 1\% = \frac{1}{100} \implies \frac{4E}{V_0} e^{-2qa} \leq \frac{1}{100} \\ &\implies e^{-2qa} \leq \frac{V_0}{4E} \frac{1}{100} \\ &\implies a \geq -\frac{1}{2q} \ln\left(\frac{V_0}{400E}\right) \end{aligned}$$

   tenant compte de fait que $E = 10\,eV$, $V_0 = 20\,eV$, $mc^2 = 0.5\,MeV$, et $hc = 12400\,eV.\text{Å}$ on déduit que:

$$q = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar} = \frac{2\pi\sqrt{2mc^2(V_0-E)}}{hc} = \frac{2\pi\sqrt{2\times 0.5\times 10^6(10)}}{12400} = 1.60235\,\text{Å}^{-1}$$

   et donc la profondeur demandée doit être

$$a \geq 1.65329\,\text{Å} \qquad 1\text{pt}$$