Année Universitaire 2022-2023
12 Juin 2023
Session de Rattrapage

Université Ibn Zohr
Faculté des Sciences d'Agadir
Département de Physique

Examen de Mécanique Quantique I - SMP4

DURÉE 1H30 - AUCUN DOCUMENT N'EST AUTORISÉ

N. B. : TOUTE RÉPONSE NON DÉMONTRÉE OU NON JUSTIFIÉE NE SERA PAS NOTÉE !

Questions de cours (4 pts)

1. Soit $\mathbf{A}$ un opérateur hermitique ayant deux vecteurs propres $|\phi_1\rangle$ et $|\phi_2\rangle$, associés respectivement à deux valeurs propres réelles λ_1 et λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$). Montrer que le produit scalaire $\langle\phi_1|\phi_2\rangle = 0$.
2. Interpréter la relation qui régit l'effet Compton :
$$\lambda - \lambda_0 = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$$
3. Un rayon X de longueur d'onde $\lambda_0 = 0.3\,\text{Å}$ subit une diffusion Compton à $60°$. Quelles sont, après diffusion, la longueur d'onde, λ, du photon et l'énergie cinétique de l'électron $E_c^{e^-}$.

On donne : $h/mc = 0,024\,\text{Å}$ ($= \lambda_C$ dite longueur d'onde de Compton), et $hc = 12400\,eV.\text{Å}$.

Exercice (6 pts)

Considérons une particule de masse m, astreint à se déplacer sur l'axe $x'ox$ entre $x = 0$ et $x = a$ ($a > 0$), où le potentiel $V(x)$ est constant et vaut $V_0 = 0$ (le potentiel ailleurs est infini).

1. Tracer l'allure de $V(x)$.
2. Écrire l'équation de Schrödinger pour ce système.
3. Résoudre cette équation et montrer que l'énergie est quantifiée.
4. En déduire l'expression de la fonction d'onde d'une particule dans un puits de potentiel infini.
5. Calculer la probabilité de présence de la particule en un point quelconque du puits.
En quels points la densité de probabilité est maximale ?
6. Calculer la probabilité de présence de la particule dans les cas suivants :
$$i)\ 0 \le x \le a \qquad \text{et} \qquad ii)\ 0 \le x \le \frac{a}{4}$$

7. Calculer la séparation d'énergie pour deux niveaux voisins: $\Delta E = E_{n+1} - E_n$.
   Que devient cette séparation si a devient très grand (dimension macroscopique).
   Qu'est ce qu'on peut dire de la quantification d'énergie ?

$\boxed{\textit{Problème}}$ **(10 pts)**

Un qubit (aussi appelé QUANTUM BIT) est la superposition linéaire de deux états $|0\rangle$ et $|1\rangle$ qui sont les états propres d'un hamiltonien H associés aux valeurs propres E_0 et E_1 respectivement. On supposera que ces états forment une base orthonormée de l'espace des états.

1. Ecrire la matrice associé à H, dans la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ (on notera $\tilde{\mathrm{H}}$ cette matrice).

On considère les deux qubits suivants :

$$|q_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle + |1\rangle\big) \quad , \quad |q_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle - |1\rangle\big)$$

2. Ces qubits sont-ils normés ?
3. On considère l'opérateur projecteur sur l'état $|1\rangle$: $\mathrm{P}_1 = |1\rangle\langle 1|$.
   (a) Ecrire l'action de cet opérateur sur les 2 vecteurs de la base $|0\rangle$ et $|1\rangle$.
   (b) En déduire la matrice correspondant à cet opérateur, dans cette base. Cet opérateur est-il hermitique ?
   (c) Quels sont les valeurs propres et vecteurs propres de P_1
   (d) Les opérateurs P_1 et H commutent-ils ?
   (e) Les qubits $|q_0\rangle$ et $|q_1\rangle$ sont-ils des états propres de P_1 ? Justifier votre réponse.
4. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(t=0)\rangle = |\psi(0)\rangle = |q_0\rangle$. On mesure l'énergie E du système à $t = 0$.
   (a) Quelles valeurs de E peut-on obtenir et avec quelles probabilités ?
   (b) Calculer la valeur moyenne de l'énergie ainsi que ΔE.
   (c) Donner l'état du système $|\psi(t)\rangle$, à un instant t ultérieur après la mesure, en fonction du résultat trouvé pour l'énergie.