Année Universitaire 2022-2023
12 Juin 2023
Session de Rattrapage

Université Ibn Zohr
Faculté des Sciences d'Agadir
Département de Physique

Correction de l'Examen de Méca. Quantique I - SMP4

Questions de cours (4 pts)

1. Soit A un opérateur hermitique, et $|\phi_1\rangle$, $|\phi_2\rangle$ deux vecteurs propres de A associés aux deux valeurs propres réelles : λ_1 et λ_2. Donc, on part du fait que -

$$\mathsf{A}\,|\phi_1\rangle = \lambda_1\,|\phi_1\rangle \tag{1}$$
$$\mathsf{A}\,|\phi_2\rangle = \lambda_2\,|\phi_2\rangle \tag{2}$$
$$\text{avec} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \tag{3}$$

donc

$$\text{d'après Eq.}(2) \implies \langle\phi_1|\,\mathsf{A}\,|\phi_2\rangle = \lambda_2\,\langle\phi_1|\phi_2\rangle \tag{4}$$
$$\text{d'après Eq.}(1) \implies \langle\phi_1|\,\mathsf{A}^\dagger = \lambda_1^*\,\langle\phi_1| \implies \langle\phi_1|\,\mathsf{A} = \lambda_1\,\langle\phi_1| \tag{5}$$

où dans le deuxième passage en Eq.(5), on a tenu compte des données: A hermitique $\iff \mathsf{A}^\dagger = \mathsf{A}$ et $\lambda_1 \in \mathbb{R} \iff \lambda_1^* = \lambda_1$.
Finalement, l'action de $\langle\phi_1|\,\mathsf{A}\,\big(= \lambda_1\,\langle\phi_1|\big)$ sur $|\phi_2\rangle$ donne comme résultat :

$$\langle\phi_1|\,\mathsf{A}\,|\phi_2\rangle = \lambda_1\,\langle\phi_1|\phi_2\rangle \tag{6}$$

En comparant les Eqs.(4) et (6), il vient que : $\lambda_1\,\langle\phi_1|\phi_2\rangle = \lambda_2\,\langle\phi_1|\phi_2\rangle$
c-à-d :

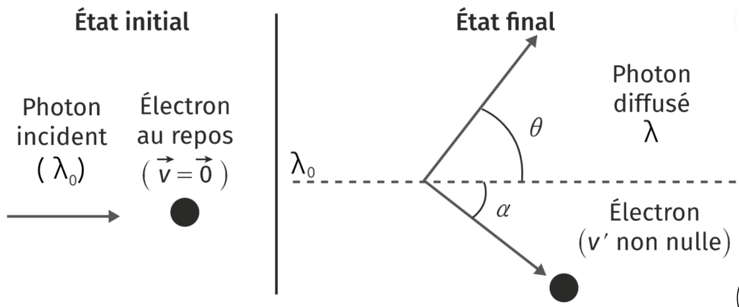
$$\big(\lambda_1 - \lambda_2\big)\,\langle\phi_1|\phi_2\rangle = 0$$

Et comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$, il s'en suit finalement que $\boxed{\langle\phi_1|\phi_2\rangle = 0}$. 1.5pt

2. Interpréter la relation qui régit l'effet Compton :

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{h}{mc}\big(1 - \cos\theta\big)$$

La relation ci-dessus décrit convenablement le processus physique qui se produit lors de la collision d'un rayonnement X quelconque (des photons γ) avec un électron e^- au repos. Tel rayonnement X possède initialement une énergie $E_0 = h\nu_0 = hc/\lambda_0$ et une impulsion $p_0 = E_0/c$.



1pt

Apres le choc, le photon initial subit une diffusion de telle sorte que le photon diffusé change de longueur d'onde qui dépendra uniquement de l'angle θ de diffusion.

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta) \tag{7}$$

3. Diffusion Compton d'un rayon X de longueur d'onde $\lambda_0 = 0.3\,\text{Å}$ à $\theta = 60°$.
   Pour calculer la longueur d'onde du photon après diffusion, on fait l'application numérique dans l'Eq.(7). Soit alors,

$$\lambda = 0.3\,\text{Å} + \frac{h}{mc}(1 - \cos 60°) = 0.3\,\text{Å} + 0{,}024\,\text{Å}(1 - \cos 60°) \Longrightarrow \boxed{\lambda = 0.312\,\text{Å}}$$

0.75pt

Pour l'énergie cinétique de l'électron diffusé, on applique la loi de conservation de l'énergie avant et après le choc:

$$\underbrace{h\nu_0}_{\text{énergie du photon avant le choc}} = \underbrace{h\nu}_{\text{énergie du photon après le choc}} + \underbrace{Ec^{e^-}}_{\text{énergie de l'électron après le choc}}$$

donc, l'énergie (purement cinétique) de l'électron après le choc est:

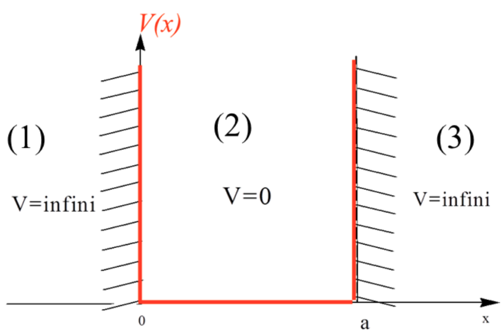
$$\begin{aligned} E_c^{e^-} &= h\nu_0 - h\nu \\ &= \frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda} \\ &= \frac{12400\,eV.\text{Å}}{0.3\,\text{Å}} - \frac{12400\,eV.\text{Å}}{0.312\,\text{Å}} = 1589.74\,eV \Longrightarrow \boxed{E_c^{e^-} = 1.589\,KeV}. \end{aligned}$$

0.75pt

$\boxed{Exercice}$ (6 pts)

Considérons une particule de masse m, astreint à se déplacer sur l'axe $x'ox$ entre $x = 0$ et $x = a$, où le potentiel $V(x)$ est constant et vaut $V_0 = 0$ (le potentiel ailleurs est infini).

1. L'allure de $V(x)$ est illustrée par la figure ci-dessous.



0.5pt

2. **L'équation de Schrödinger pour ce système.**
   à l'intérieur du puits, où $V(x) = V_0 = 0$, on note la fonction d'onde par $\psi_2(x)$, et on écrit :

$$\frac{d^2\psi_2(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\psi_2(x) = 0$$

à l'extérieur du puits, on écrit :

$$\frac{d^2\psi_{1,3}(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x))\,\psi_{1,3}(x) = 0$$

avec $\psi_1(x)$ et $\psi_3(x)$ sont les deux fonctions d'onde respectivement dans les régions (1) et (3).

3. **Résolution des équations précédentes**
   Classiquement, la particule ne peut qu'osciller entre les deux parois du puits, c-à-d entre $x = 0$ et $x = a$.
   Quantiquement parlant, la fonction d'onde de la particule doit être nulle à l'extérieur du puits

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\psi_1(x) = \psi_3(x) = 0} \qquad \text{0.5pt}$$

et aussi doit être continue en $x = 0$ et $x = a$.
La Quantification de l'Énergie.
À l'intérieur du puits, l'équation de Schrödinger s'écrit,

$$\psi_2''(x) + k^2\,\psi_2(x) = 0 \quad \text{avec} \quad k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E$$

Les fonctions d'onde de la particule sont donc de la forme :

$$\psi_2(x) = A\,e^{ikx} + B\,e^{-ikx} \qquad \text{0.5pt}$$

Continuité en $x = 0$ et $x = a$

$$\begin{cases} \psi_1(x = 0^-) = \psi_2(x = 0^+) \\ \psi_2(x = a^-) = \psi_3(x = a^+) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A + B = 0 \Longrightarrow A = -B \\ Ae^{ika} + Be^{-ika} = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad A(e^{ika} - e^{-ika}) = 0 \quad \Longrightarrow 2iA\,\sin(ka) = 0 \quad \Longrightarrow \sin(ka) = 0 \quad \Longrightarrow ka = n\pi.$$

On en déduit alors que

$$k^2 = \frac{n^2\pi^2}{a^2} = \frac{2m}{\hbar^2}E$$

L'égalité $ka = n\pi$ montre que le nombre d'onde k ne peut prendre que des valeurs discretes, i.e. $k \to k_n$, et ça reste valable aussi pour l'énergie. Finalement

$$\boxed{E = E_n = \frac{n^2\,\pi^2\,\hbar^2}{2\,m\,a^2}, \quad \text{et l'énergie est bien quantifiée}} \qquad \text{0.5pt}$$

4. **L'expression de la fonction d'onde d'une particule dans un puits de potentiel infini.**
   D'après ce qui precede, on a trouvé que :

- $\psi_2(x) = A\,e^{ikx} + B\,e^{-ikx}$
- $A = -B$
- $k = n\pi/a$

Donc

$$\psi_2(x) = C\,\sin\left(\frac{n\,\pi}{a}x\right) \quad \text{avec} \quad C = 2iA$$

Soit alors

$$\boxed{\psi_2(x) = \psi_n(x) = C\,\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)} \qquad \text{0.5pt}$$

cette fonction d'onde $\psi_n(x)$ est de carré sommable, et d'où la probabilité total de trouver la particule le long de l'axe x vaut 1. On écrit :

$$\underbrace{\cancel{\int_{-\infty}^{0} |\psi_1(x)|^2 dx}}_{=0} + \int_0^a |\psi_2(x)|^2 dx + \underbrace{\cancel{\int_a^{+\infty} |\psi_3(x)|^2 dx}}_{=0} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \int_0^a |C|^2 \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx = 1$$

$$\Longrightarrow \int_0^a \frac{|C|^2}{2}\left(1 - \cos\left(2\frac{n\pi}{a}x\right)\right) dx = 1$$

$$\Longrightarrow \frac{|C|^2}{2}\left[x - \frac{a}{2n\pi}\sin\left(2\frac{n\pi}{a}x\right)\right]_0^a = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{|C|^2}{2}a = 1 \quad \Longrightarrow \quad C = \sqrt{\frac{2}{a}}e^{i\theta}$$

En prenant la phase $\theta = 0$, on écrit

$$\boxed{\psi_2(x) = \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)} \qquad \text{0.5pt}$$

5. **La probabilité de présence** de la particule en un point quelconque du puits.
Cette probabilité s'écrit :

$$\mathscr{P}(x) = |\psi_n(x)|^2 = \frac{2}{a}\sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \qquad \text{0.5pt}$$

En quels points la densité de probabilité est maximale ?

$\mathscr{P}(x)$ est maximale $\Longleftrightarrow \dfrac{d\mathscr{P}(x)}{dx} = 0$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \frac{2}{a}.2.\frac{n\pi}{a}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) = 0\\
&\Longrightarrow \frac{4n\pi}{a^2}\frac{1}{2}\sin\left(2\frac{n\pi}{a}x\right) = 0\\
&\Longrightarrow \sin\left(2\frac{n\pi}{a}x\right) = 0\\
&\Longrightarrow 2\frac{n\pi}{a}x = p\pi \Longrightarrow x = \frac{pa}{2n} \quad (p \in \mathbb{N})
\end{aligned}$$

on a

$$0 < x < a \Longrightarrow 0 < \frac{pa}{2n} < a \Longrightarrow 0 < p < 2n \qquad \text{0.5pt}$$

Alors

- n = 1 :

$$E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} \quad \text{et} \quad \psi_{n=1} = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \quad \text{et comme} \quad 0 < p < 2 \Longrightarrow p = 1$$

  donc la probabilité est maximale en $x = \frac{a}{2}$
- n = 2 :

$$E_2 = \frac{2\pi^2\hbar^2}{ma^2} \quad \text{et} \quad \psi_{n=2} = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(2\frac{\pi}{a}x\right) \quad \text{et comme} \quad 0 < p < 4 \Longrightarrow p = 1, 2, 3$$

  donc la probabilité est maximale en $x = \frac{a}{4}\,(p=1)$, $x = \frac{a}{2}\,(p=2)$ et $x = \frac{3a}{4}\,(p=3)$.

6. **La probabilité de présence de la particule dans cahque cas**
Calculons tout d'abord la probabilité $\mathscr{P}$ pour trouver la particule entre x_1 et x_2. Soit alors,

$$\mathscr{P} = \mathscr{P}(x_1 \leq x \leq x_2) = \frac{2}{a}\int_{x_1}^{x_2} \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx = \frac{1}{a}\left[x - \frac{a}{2n\pi}\sin\left(2\frac{n\pi}{a}x\right)\right]_{x_1}^{x_2}$$

c'est-à-dire

$$\mathscr{P} = \frac{1}{a}\left[x_2 - x_1 - \frac{a}{2n\pi}\sin\left(2\frac{n\pi}{a}x_2\right) + \frac{a}{2n\pi}\sin\left(2\frac{n\pi}{a}x_1\right)\right]$$

- $\boxed{0 \leq x \leq a}$

$$\mathscr{P}(0 \leq x \leq a) = \frac{1}{a}\left[a - 0 - \frac{a}{2n\pi}\sin\left(2\frac{n\pi}{a}a\right) + \frac{a}{2n\pi}\sin\left(2\frac{n\pi}{a}0\right)\right] = 1$$

0.5pt

- $\boxed{0 \leq x \leq a/4}$

$$\mathscr{P}(0 \leq x \leq a/4) = \frac{1}{a}\left[\frac{a}{4} - 0 - \frac{a}{2n\pi}\sin\left(2\frac{n\pi}{a}\frac{a}{4}\right) + \frac{a}{2n\pi}\sin\left(2\frac{n\pi}{a}0\right)\right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

0.5pt

7. **La séparation d'énergie pour deux niveaux voisins E_n et E_{n+1}.**
On a

$$\Delta E_n = E_{n+1} - E_n = \frac{(n+1)^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2} - \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2} = (2n+1)\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

0.5pt

Séparation si a devient très grand (dimension macroscopique).

$$\text{Si} \quad a \to +\infty \ : \ \Delta E_n = 0 \implies E_{n+1} \approx E_n$$

0.25pt

Qu'est ce qu'on peut dire de la quantification d'énergie ?

l'énergie dans ce cas devient continue

0.25pt

$\boxed{\textit{Problème}}$ (10 pts)

Un qubit (aussi appelé QUANTUM BIT) est la superposition linéaire de deux états $|0\rangle$ et $|1\rangle$ qui sont les états propres d'un hamiltonien H associés aux valeurs propres E_0 et E_1 respectivement. On supposera que ces états forment une base orthonormée de l'espace des états.

1. La matrice associé à H, dans la base $\mathscr{B} = \{|0\rangle, |1\rangle\}$.
Comme $|0\rangle$ et $|1\rangle$ sont les états propres de l'hamiltonien associés respectivement aux valeurs propres E_0 et E_1, on écrit :

$$H|0\rangle = E_0|0\rangle \quad \text{et} \quad H|1\rangle = E_1|1\rangle$$

Donc, dans la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ on écrit la matrice $\tilde{H}$ représentant H par

$$\tilde{H} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} |0\rangle & |1\rangle \end{array} \\ \begin{array}{c} \langle 0| \\ \langle 1| \end{array} & \begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix} \end{array}$$

0.5pt

On considère les deux qubits suivants :

$$|q_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle + |1\rangle\big) \quad , \quad |q_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle - |1\rangle\big)$$

2. Ces qubits sont normés parce que

$$\langle q_0|q_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\langle 0| + \langle 1|\big).\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle + |1\rangle\big) = \frac{1}{2}\big(\underbrace{\langle 0|0\rangle}_{=1} + \underbrace{\cancel{\langle 0|1\rangle}}_{=0} + \underbrace{\cancel{\langle 1|0\rangle}}_{=0} + \underbrace{\langle 1|1\rangle}_{=1}\big) = \frac{1}{2}\times 2 = 1$$

$$\langle q_1|q_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\langle 0| - \langle 1|\big).\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle - |1\rangle\big) = \frac{1}{2}\big(\underbrace{\langle 0|0\rangle}_{=1} + \underbrace{\cancel{\langle 0|1\rangle}}_{=0} + \underbrace{\cancel{\langle 1|0\rangle}}_{=0} + \underbrace{\langle 1|1\rangle}_{=1}\big) = \frac{1}{2}\times 2 = 1$$ 1pt

3. On considère l'opérateur projecteur sur l'état $|1\rangle$: $\mathsf{P}_1 = |1\rangle\langle 1|$.

   (a) L'action sur les 2 vecteurs de la base $|0\rangle$ et $|1\rangle$.
   Ils sont données par

$$\mathsf{P}_1|0\rangle = |1\rangle\langle 1|0\rangle = 0\,|0\rangle + 0\,|1\rangle$$

$$\mathsf{P}_1|1\rangle = |1\rangle\langle 1|1\rangle = 0\,|0\rangle + 1\,|1\rangle$$ 0.5pt

   (b) Soit $\tilde{\mathsf{P}}_1$ La matrice correspondant à cet opérateur
   Dans la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, la matrice correspondante s'écrit :

$$\tilde{\mathsf{P}}_1 = \begin{array}{c} \\ \langle 0| \\ \langle 1| \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} |0\rangle & |1\rangle \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$ 0.5pt

   <u>Hermiticité</u>
   il suffit d'observer que

$$\tilde{\mathsf{P}}_1^\dagger = \text{Transpose}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^c\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \tilde{\mathsf{P}}_1$$ 0.5pt

   alors P_1 est hermitique.

   (c) Valeurs propres et vecteurs propres de $\tilde{\mathsf{P}}_1$
   Comme $\tilde{\mathsf{P}}_1$ est une matrice diagonale, alors les valeurs propres sont : 0 et 1, de telle sorte que

   - pour la valeur propre $\lambda = 0$ le vecteur propre correspondant est $|0\rangle$: $\tilde{\mathsf{P}}_1|0\rangle = 0\,|0\rangle$
   - pour la valeur propre $\lambda = 1$ le vecteur propre correspondant est $|1\rangle$: $\tilde{\mathsf{P}}_1|1\rangle = 1\,|1\rangle$ 1pt

   (d) Commutateur $[\mathsf{P}_1, \mathsf{H}]$
   On calcul

$$\begin{aligned}
[\mathsf{P}_1, \mathsf{H}] &= \tilde{\mathsf{P}}_1\tilde{\mathsf{H}} - \tilde{\mathsf{H}}\tilde{\mathsf{P}}_1 \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

   donc P_1 et H commutent. 1pt

(e) Vérifions si les qubits $|q_0\rangle$ et $|q_1\rangle$ sont des états propres de P_1
on a

$$\tilde{\mathsf{P}}_1 |q_0\rangle = |1\rangle\langle 1|q_0\rangle = |1\rangle\langle 1| \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle + |1\rangle\big) = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \not\propto |q_0\rangle$$

$$\tilde{\mathsf{P}}_1 |q_1\rangle = |1\rangle\langle 1|q_1\rangle = |1\rangle\langle 1| \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle - |1\rangle\big) = -\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \not\propto |q_1\rangle$$

Il s'en suit alors que $|q_0\rangle$ et $|q_1\rangle$ ne sont pas des états propres de P_1, car il n'existe aucune $a,b \in \mathbb{C}$ tels que:

$$\tilde{\mathsf{P}}_1 |q_0\rangle = a\,|q_0\rangle \quad \text{et} \quad \tilde{\mathsf{P}}_1 |q_1\rangle = b\,|q_1\rangle$$ 1pt

4. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(t=0)\rangle = |\psi(0)\rangle = |q_0\rangle$, et on mesure l'énergie E du système à cet instant $t = 0$.

(a) Valeurs de E obtenues
D'après postulat (3) les seuls résultats de mesure d'énergie possibles sont les valeurs propres de l'hamiltonien associé H, c'est-à-dire : E_0 et E_1. 0.5pt

Probabilités correspondantes
les deux vecteurs propres associés aux valeurs propres E_0 et E_1 sont respectivement : $|0\rangle$ et $|1\rangle$. Donc les probabilités demandées s'écrivent :

$$\mathscr{P}(E_0) = \frac{|\langle 0|\psi(0)\rangle|^2}{\langle\psi(t=0)|\psi(0)\rangle} = \frac{|\langle 0|q_0\rangle|^2}{1} = \frac{1}{2}$$ 0.5pt

$$\mathscr{P}(E_1) = \frac{|\langle 1|\psi(0)\rangle|^2}{\langle\psi(0)|\psi(0)\rangle} = \frac{|\langle 1|q_0\rangle|^2}{1} = \frac{1}{2}$$ 0.5pt

(b) La valeur moyenne de l'énergie
Par definition

$$\begin{aligned}\langle \mathsf{H}\rangle &= \sum_{k=0,1} E_k \mathscr{P}(E_k)\\ &= E_0\mathscr{P}(E_0) + E_1\mathscr{P}(E_1)\\ &= \frac{1}{2}E_0 + \frac{1}{2}E_1\\ &= \frac{1}{2}\big(E_0 + E_1\big)\end{aligned}$$ 1pt

Autre méthode

$$\begin{aligned}\langle \mathsf{H}\rangle = \langle \mathsf{H}\rangle_{|\psi(0)\rangle} &= \langle\psi(0)|\,\mathsf{H}\,|\psi(0)\rangle\\ &= \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_0 & 0\\ 0 & E_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{E_0}{\sqrt{2}}\\ \frac{E_1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{2}E_0 + \frac{1}{2}E_1\\ &= \frac{1}{2}\big(E_0 + E_1\big)\end{aligned}$$

Pour l'écart quadratique ΔE
Par definition

$$\Delta E = \sqrt{\langle \mathsf{H}^2\rangle - \langle \mathsf{H}\rangle^2}$$

avec

$$\mathsf{H}^2 = \mathsf{HH} = \begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0^2 & 0 \\ 0 & E_1^2 \end{pmatrix}$$

cette patrice possède deux valeurs propres E_0^2 et E_1^2 associées respectivement aux vecteurs propres : $|0\rangle$ et $|1\rangle$. De plus, les probabilités correspondantes sont :

$$\mathscr{P}(E_0^2) = \frac{|\langle 0|\psi(0)\rangle|^2}{\langle \psi(0)|\psi(0)\rangle} = \frac{|\langle 0|q_0\rangle|^2}{1} = \frac{1}{2} \qquad \mathscr{P}(E_1^2) = \frac{|\langle 1|\psi(0)\rangle|^2}{\langle \psi(0)|\psi(0)\rangle} = \frac{|\langle 1|q_0\rangle|^2}{1} = \frac{1}{2}$$

donc

$$\begin{aligned} \langle \mathsf{H}^2\rangle &= \sum_{k=0,1} E_k^2 \mathscr{P}(E_k^2) \\ &= E_0^2\mathscr{P}(E_0^2) + E_1^2\mathscr{P}(E_1^2) \\ &= \frac{1}{2}E_0^2 + \frac{1}{2}E_1^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(E_0^2 + E_1^2\right) \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned} \Delta E &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(E_0^2+E_1^2\right) - \frac{1}{4}\left(E_0+E_1\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}\left(E_0^2+E_1^2\right) - \frac{1}{2}E_0E_1} \\ &= \sqrt{\frac{\left(E_0^2+E_1^2-2E_0E_1\right)}{4}} = \frac{|E_0-E_1|}{2} \end{aligned}$$

1pt

(c) L'état $|\psi(t)\rangle$ du système après la mesure.
Méthode $\boxed{1}$:
On applique le postulat de l'évolution (postulat 6) qui stipule que le vecteur d'état $|\psi(t)\rangle$ évolue dans le temps selon l'équation de Schrodinger :

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle \tag{1}$$

On résout alors cette Équation.(1) en tenant compte de l'état initial :

$$|\psi(0)\rangle = |q_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right) \tag{2}$$

Posons alors :

$$|\psi(t)\rangle = c_0(t)\,|0\rangle + c_1(t)\,|1\rangle$$

L'équation.(1) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} i\hbar\sum_{k=0}^{1}\frac{dc_k(t)}{dt}|k\rangle &= H\Big(c_0(t)\,|0\rangle + c_1(t)\,|1\rangle\Big) \\ &= c_0(t)E_0\,|0\rangle + c_1(t)E_1\,|1\rangle \end{aligned}$$

En projetant cette équation sur chacun des vecteurs de la base $\mathscr{B}$, on obtient le système d'équations suivantes :

$$\begin{cases} i\hbar\dot{c}_0(t) = E_0\, c_0(t) \\ i\hbar\dot{c}_1(t) = E_1\, c_2(t) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_0(t) = c_0(0)e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t} & \text{avec} \quad c_0(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ c_1(t) = c_1(0)e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} & \text{avec} \quad c_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Finalement :

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t}\,|0\rangle + e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}\,|1\rangle\right]$$

0.5pt

Méthode $\boxed{2}$:

Le vecteur d'état $|\psi(t)\rangle$ à l'instant t est obtenu en appliquant l'opérateur d'évolution à l'état $|\psi(0)\rangle$:

$$|\psi(t)\rangle = U(t,0)\,|\psi(0)\rangle$$

L'hamiltonien H étant indépendant du temps, donc :

$$U(t,0) = e^{-\frac{i}{\hbar}H.t}$$

Ainsi :

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H.t}\,|\psi(0)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H.t}\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle + |1\rangle\big)$$

Et comme $|0\rangle$, et $|1\rangle$ sont des vecteurs propres de l'opérateur H pour les valeurs propres respectives E_0, et E_1. Donc ces vecteurs sont aussi vecteurs propres de l'opérateur U qui est une fonction de H pour les valeurs propres suivantes : $e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t}$ et $e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}$ respectivement.

Rappel :

$$\boxed{A\,|\varphi_a\rangle = a\,|\varphi_a\rangle \quad \Longrightarrow \quad F(A)\,|\varphi_a\rangle = F(a)\,|\varphi_a\rangle}$$

Donc :

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t}\,|0\rangle + e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}\,|1\rangle\right]$$