Université Cadi Ayyad **Année universitaire 2020/2021**
Faculté des Sciences Semlalia
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE
Marrakech **SMP/S5**

MÉCANIQUE QUANTIQUE II

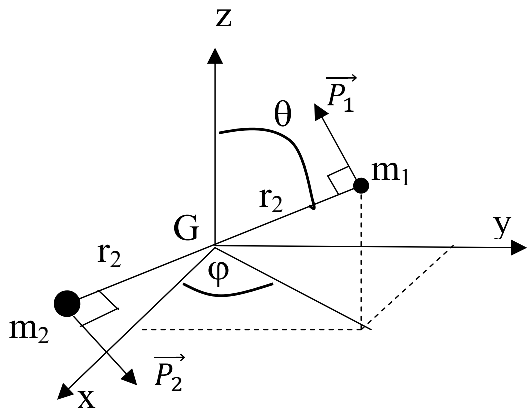
T.D. - Série nº 2

================

Moment cinétique orbital et de spin - Harmoniques sphériques- Composition des moments cinétiques

<u>Exercice1 :</u> Rotation d'une molécule diatomique.

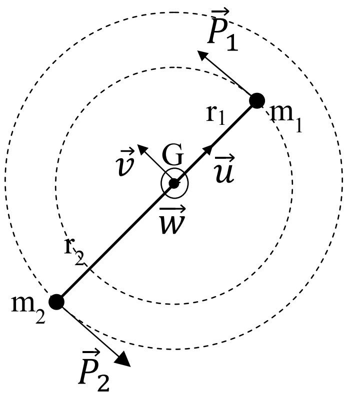
Nous assimilerons une molécule diatomique rigide à deux particules de masse m_1 et m_2 reliées par une tige de masse négligeable et de distance fixe r_e. Leur centre de masse est pris comme origine d'un trièdre direct Oxyz. L'ensemble est rigide et tourne avec une vitesse angulaire ω autour d'un axe situé à une distance r_1 de m_1 et r_2 de m_2. L'axe de la molécule est repéré par les angles θet φ.



1) Déterminer l'expression de l'énergie cinétique de rotation classique de la molécule autour de son centre de masse. En déduire que l'Hamiltonien quantique s'écrit

$$H = \frac{L^2}{2I}$$

où L est l'opérateur moment cinétique orbital. Expliciter et donner le sens physique de I.



On a aussi $\begin{cases} m_1 r_1 = m_2 r_2 \\ r_e = r_1 + r_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \frac{m_2}{M} r_e \\ r_2 = \frac{m_1}{M} r_e \end{cases}$ avec M = $m_1 + m_2$.

$L_1 = \frac{m_1 m_2^2}{M^2} r_e^2 \omega$ et $L_2 = \frac{m_1^2 m_2}{M^2} r_e^2 \omega$ avec $m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = \frac{m_1 m_2}{M} r_e^2 = \mu r_e^2$

$$L = L_1 + L_2 = \frac{m_1 m_2}{M} r_e^2 \omega = \mu r_e^2 \omega$$

$$H = \frac{P_1^2}{2m_1} + \frac{P_2^2}{2m_2} = \frac{1}{2}(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)\omega^2 = \frac{1}{2}\mu r_e^2 \omega^2 = \frac{1}{2}\frac{\mu^2 r_e^4 \omega^2}{\mu r_e^2}$$

Soit : $H = \frac{L^2}{2I}$ avec $I = \mu r_e^2$ est le moment d'inertie de la molécule.

2) Donner les états stationnaires et les énergies de rotation de la molécule. Indiquer la dégénérescence. Montrer que les écarts entre deux niveaux énergétiques ℓ-1 et ℓ croient linéairement avec le nombre quantique ℓ.

$|\ell, m\rangle$ sont les états propre de $L^2 \Rightarrow$ sont aussi états propres de H.

On a : $L^2|\ell, m\rangle = \hbar^2 \ell(\ell+1)|\ell, m\rangle \quad \Rightarrow \quad H|\ell, m\rangle = \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2I}|\ell, m\rangle$

$$E_\ell = \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2I} \quad ,$$

Il y a $2\ell + 1$ valeurs de m donc la dégénérescence est : $g_\ell = 2\ell + 1$

$$\Delta E_\ell = E_\ell - E_{\ell-1} = \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2I} - \frac{\hbar^2 \ell(\ell-1)}{2I} = \frac{\hbar^2 \ell}{I}$$

3) Le spectre d'absorption de la molécule CO du monoxide de carbone présente un pic pour une longueur d'onde de 1,3 mm correspondant à une transition entre les niveaux ℓ = 1 et ℓ = 2. Calculer le moment d'inertie de la molécule et en déduire la distance r_e de celle-ci.

On donne les masses molaire des atomes : $M_C = 12$ g $\quad M_O = 16$ g $\quad$ et $h = 6{,}62\ 10^{-34}\ Js$

$\Delta E_2 = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{2\hbar^2}{I} \qquad \Rightarrow \qquad I = \frac{2\hbar^2}{\Delta E_2} = \frac{\lambda h}{2\pi^2 c}$

A.N. $\quad I = \frac{\lambda h}{2\pi^2 c} = \frac{1{,}3 \cdot 6{,}62}{6\pi^2} 10^{-45} kgm^2 = 1{,}45 \cdot 10^{-46} kg \cdot m^2$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{1}{\mathcal{N}} = \frac{192}{28 \cdot 6{,}02} 10^{29} kg = 1{,}14 \cdot 10^{-26}\ kg$$

$I = \mu r_e^2 \qquad \Rightarrow \qquad r_e = \sqrt{\frac{I}{\mu}} = \sqrt{\frac{1{,}45}{1{,}14}} 10^{-10} m = 1{,}13\ \text{Å}$

<u>Exercice2</u> : Harmoniques sphériques

On considère un système physique dans l'état de fonction d'onde:

$$\psi(\vec{r}) = N \cdot (x + y + z) \cdot e^{-\alpha r}$$

où N est une constante de normalisation.

1) Montrer que $\psi(\vec{r})$peut se mettre sous la forme :

$$\psi(\vec{r}) = f(r) g(\theta, \varphi)$$

Développer la partie angulaire dans la base des harmoniques sphériques.

On donne : $Y_{10}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta; \quad Y_{11}(\theta, \varphi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta\, e^{i\varphi}; \quad Y_{1,-1}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta\, e^{-i\varphi}$

En coordonnées sphériques, on sait :

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \qquad \psi(\vec{r}) = N \cdot (\sin\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi + \cos\theta) \cdot re^{-\alpha r}$$

Donc $\quad f(r) = re^{-\alpha r} \qquad$ et $\qquad g(\theta, \varphi) = N \cdot (\sin\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi + \cos\theta)$

En utilisant les expressions des harmoniques sphériques, on a :

$$\sin\theta\cos\varphi = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} [Y_1^{-1}(\theta, \varphi) - Y_1^1(\theta, \varphi)]$$

$\sin\theta\sin\varphi = i\sqrt{\frac{2\pi}{3}} [Y_1^1(\theta, \varphi) + Y_1^{-1}(\theta, \varphi)] \qquad$ et $\qquad \cos\theta = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_1^0(\theta, \varphi)$

$\frac{}{3}$ $(\theta,$ $-$

$|g\rangle = N$ — $-$

$-$

$\sqrt{6}$

2) Quels sont les résultats possibles lors d'une mesure de L_z sur cet état ? et lors d'une mesure de L^2 sur cet état ?

3) Calculer les probabilités de tous les résultats possibles lors d'une mesure de L_z sur cet état. Indiquer l'état du système immédiatement après la mesure.

On sait que la probabilité de mesure est :

$$\mathcal{P}(vp) = |\langle \ell, m|g\rangle|^2 \qquad \text{(puisque } \langle g|g\rangle = 1\text{)}$$

Donc : $\mathcal{P}(\hbar) = \frac{1}{3}$ $\quad \mathcal{P}(-\hbar) = \frac{1}{3}$ $\quad$ et $\quad \mathcal{P}(0) = \frac{1}{3}$

Si le résultat de mesure est $\hbar$, l'état immédiatement après la mesure est $|1,1\rangle$

Si le résultat de mesure est $-\hbar$, l'état immédiatement après la mesure est $|1,-1\rangle$

Si le résultat de mesure est 0, l'état immédiatement après la mesure est $|1,0\rangle$

4) Calculer la valeur moyenne de L_z sur cet état.

$$\langle g|L_z|g\rangle = \hbar\mathcal{P}(\hbar) - \hbar\mathcal{P}(-\hbar) + 0\mathcal{P}(0) = 0$$

<u>Exercice 3:</u> Opérateurs moments cinétiques

On considère un système physique dont l'espace des états, E^4, est de dimension 4. Les kets propres communs aux observables J^2 et J_z .$\{|j,m\rangle\}$, avec j = 0, 1 forment une base de l'espace.

1) Ecrire dans cette base les matrices des opérateurs J_z , J^2 et J_x. On rangera les kets $|j,m\rangle$ dans l'ordre $|1,1\rangle$, $|1,0\rangle$, $|1,-1\rangle$, $|0,0\rangle$. Calculer les kets propres communs à J^2 et J_x.

2) $J_z|j,m\rangle = m\hbar|j,m\rangle$ $\qquad$ donc $\qquad (J_z) = \begin{pmatrix} \hbar & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hbar & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$J^2|j,m\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j,m\rangle$ $\qquad$ donc $\qquad (J^2) = \begin{pmatrix} 2\hbar^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\hbar^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\hbar^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$J_x|j,m\rangle = \frac{1}{2}(J_+ + J_-)|j,m\rangle = \frac{\hbar}{2}\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}|j,m+1\rangle + \frac{\hbar}{2}\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}|j,m-1\rangle$$

$J_x|1,1\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}|1,0\rangle$, $\quad J_x|1,0\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}|1,1\rangle + \frac{\hbar}{\sqrt{2}}|1,-1\rangle$, $\quad J_x|1,-1\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}|1,0\rangle$ $\quad$ et $\quad J_x|0,0\rangle = 0$

On peut alors écrire la matrice représentant l'opérateur J_x :

$$(J_x) = \begin{pmatrix} 0 & \hbar/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ \hbar/\sqrt{2} & 0 & \hbar/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \hbar/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \hbar/\sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ (dans l'ordre prédéfini)

Calculons les valeurs propres et les vecteurs propres.

$$(J_x) = \begin{pmatrix} 0 & \hbar/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ \hbar/\sqrt{2} & 0 & \hbar/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \hbar/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il est évident que 0 est une valeur propre qui correspond au vecteur propre $|0,0\rangle$

On diagonalise la matrice de J_x dans la base réduite$\{|1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle\}$ à savoir :

$$(J_x) = \begin{pmatrix} 0 & \hbar/\sqrt{2} & 0 \\ \hbar/\sqrt{2} & 0 & \hbar/\sqrt{2} \\ 0 & \hbar/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{dét}(J_x - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & \hbar/\sqrt{2} & 0 \\ \hbar/\sqrt{2} & -\lambda & \hbar/\sqrt{2} \\ 0 & \hbar/\sqrt{2} & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{\hbar^2}{2}\right) + \lambda\frac{\hbar^2}{2} = \lambda(\hbar^2 - \lambda^2) = 0$$

Les valeurs propres sont $\lambda = 0,\ \lambda = \hbar\ et\ \lambda = -\hbar$

Et les vecteurs propres sont :

Pour $\lambda = 0$ $\qquad |x_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,1\rangle - |1,-1\rangle)$

Pour $\lambda = +\hbar$ $\qquad |x_+\rangle = \frac{1}{2}\left(|1,1\rangle + \sqrt{2}|1,0\rangle + |1,-1\rangle\right)$

Pour $\lambda = -\hbar$ $\qquad |x_-\rangle = \frac{1}{2}\left(|1,1\rangle - \sqrt{2}|1,0\rangle + |1,-1\rangle\right)$

Ces kets propres sont déterminés à un facteur de phase global près

$|x_0\rangle,\ |x_+\rangle\ \ et\ \ |x_-\rangle$ sont aussi des vecteurs propre de J^2 associés à la même valeur propre $2\hbar^2$

alors que le ket $|0,0\rangle$ est aussi vecteur propre de J^2avec la valeur propre 0

3) Soit $|\psi\rangle$ un ket normé représentant l'état du système : $|\psi\rangle = a|1,1\rangle + b|1,0\rangle + c|1,-1\rangle + d|0,0\rangle$

où a, b, c et d sont des constantes réelles. Quelle est la probabilité d'obtenir le résultat $\hbar$ lors d'une mesure de J_z dans cet état ? et lors d'une mesure de J_x ?

La probabilité d'obtenir lerésultat de mesure$J_z$égal $\hbar$ est :

$$\mathcal{P}(\hbar) = |\langle 1,1|\psi\rangle|^2 = a^2$$

La probabilité d'obtenir la valeur $\hbar$ lors de la mesure J_x est :

$$\mathcal{P}(\hbar) = |\langle x_+|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{4}\left|a + \sqrt{2}b + c\right|^2 = \frac{1}{4}\left(a + \sqrt{2}b + c\right)^2$$

Exercice 4 : Particule de spin 1/2

On considère l'Hamiltonien suivant : $H = aS_z^2 + b\left(S_x^2 - S_y^2\right)$où S est l'opérateur de spin 1/2 et a et b deux constantes réelles positives.
Déterminer les énergies et états propres de H.

Avec $S_i^2 = \frac{\hbar^2}{4} I = \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ i = x, y, z

$$S_x^2 - S_y^2 = 0$$

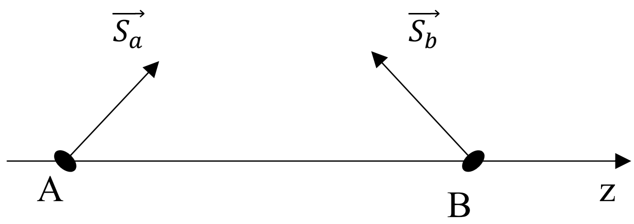
$$H = aS_z^2 + b\left(S_x^2 - S_y^2\right) = aS_z^2 = \frac{\hbar^2 a}{4} I = \frac{\hbar^2 a}{4}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

On a une seule valeur propre $E = \frac{\hbar^2 a}{4}$ qui est deux fois dégénérée. Elle correspond à deux vecteurs propres $|+\rangle \; et \;\; |-\rangle$

Exercice 5 : Interaction dipolaire magnétique- Composition de moments cinétiques.

A- Hamiltonien dipolaire

On s'intéressera ici à L'interaction entre deux moments magnétiques de deux électrons a et b de spin 1/2, liés à deux ions strontium maintenus à une distance fixe d.



Les deux moments magnétiques sont de la forme : $\overrightarrow{\mu_a} = \gamma_a \overrightarrow{S_a}$et $\overrightarrow{\mu_b} = \gamma_b \overrightarrow{S_b}$.
γ_a et $\gamma_b$sont les rapports gyromagnétiques.
Les deux moments magnétiques interagissent via l'Hamiltonien d'interaction :

$$H = \frac{\mu_0}{4\pi d^3}\left[\overrightarrow{\mu_a}\cdot\overrightarrow{\mu_b} - 3(\overrightarrow{\mu_a}\cdot\vec{z})(\overrightarrow{\mu_b}\cdot\vec{z})\right]$$

où$\vec{z}$ est un vecteur unitaire joignant les deux dipôles.

1) Montrer que l'Hamiltonien d'interaction s'écrit :

$$H = \beta\left(kS_{az}\cdot S_{bz} - S^2 + S_a^2 + S_b^2\right)$$

Où β et k sont des constantes que l'on précisera et S est le spin total tel que $\vec{S} = \overrightarrow{S_a} + \overrightarrow{S_b}$

$$H = \frac{\mu_0}{4\pi d^3}\gamma_a\gamma_b\left[\overrightarrow{S_a}\cdot\overrightarrow{S_b} - 3S_{az}S_{bz}\right]$$

Avec $\overrightarrow{S_a}\cdot\overrightarrow{S_b} = \frac{S^2 - S_a^2 - S_b^2}{2}$

$$H = -\frac{\mu_0\gamma_a\gamma_b}{8\pi d^3}\left[6S_{az}S_{bz} - S^2 + S_a^2 + S_b^2\right]$$

$\beta = -\frac{\mu_0\gamma_a\gamma_b}{8\pi d^3}$ et $k = 6$

2) Rappeler les vecteurs de la base couplée $|S, M\rangle$et donner leurs expressions en fonction des éléments de la base découplée$|m_a, m_b\rangle$. Vérifier les résultats obtenus à partir des tables de Clebsh Gordan.

La base couplée est : $\{|1{,}1\rangle,\ |1,-1\rangle,\ |1{,}0\rangle,\ |0{,}0\rangle\}$

La base découplée est : $\{|+,+\rangle,\ |+,-\rangle,\ |-,+\rangle,\ |-,-\rangle\}$
En utilisant la règle M = $m_1 + m_2$, on a immédiatement :
$|1,1\rangle = |+,+\rangle$ et $|1,-1\rangle = |-,-\rangle$
On a aussi $S_\pm = S_{a\pm} + S_{b\pm}$ de plus $S_\pm|S,m\rangle = \hbar\sqrt{S(S+1) - m(m\pm 1)}|S, m\pm 1\rangle$

$$S_-|1{,}1\rangle = \hbar\sqrt{2}|1{,}0\rangle = [S_{a-}|+,+\rangle + S_{a-}|+,+\rangle] = \hbar|-,+\rangle + \hbar|+,-\rangle$$

Et le ket$|1{,}0\rangle$ s'écrit alors : $|1{,}0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|+,-\rangle + |-,+\rangle]$

Le ket $|0,0\rangle$ est orthogonal aux autres éléments de la base et plus spécialement à $|1,0\rangle$
On pose $|0,0\rangle = \alpha|+,-\rangle + \beta|-,+\rangle$
$\langle 1,0|0,0\rangle = 0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha+\beta) \quad \Rightarrow \quad \beta = -\alpha$. Le ket normé est : $|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|+,-\rangle - |-,+\rangle]$

3) Vérifier que les kets $|S,M\rangle$ sont vecteurs propres du produit $S_{az}\bullet S_{bz}$. Quelles sont les valeurs propres associées ?

Avec $S_{az}\cdot S_{bz}|m_a,m_b\rangle = \hbar^2 m_a m_b|m_a,m_b\rangle$

$$S_{az}\cdot S_{bz}|1,1\rangle = S_{az}\cdot S_{bz}|+,+\rangle = \frac{\hbar^2}{4}|+,+\rangle = \frac{\hbar^2}{4}|1,1\rangle$$

$$et\ S_{az}\cdot S_{bz}|1,-1\rangle = S_{az}\cdot S_{bz}|-,-\rangle = \frac{\hbar^2}{4}|-,-\rangle = \frac{\hbar^2}{4}|1,-1\rangle$$

$$S_{az}\cdot S_{bz}|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[S_{az}\cdot S_{bz}|+,-\rangle + S_{az}\cdot S_{bz}|-,+\rangle] = -\frac{\hbar^2}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}[|+,-\rangle + |-,+\rangle] = -\frac{\hbar^2}{4}|1,0\rangle$$

$$S_{az}\cdot S_{bz}|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[S_{az}\cdot S_{bz}|+,-\rangle - S_{az}\cdot S_{bz}|-,+\rangle] = -\frac{\hbar^2}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}[|+,-\rangle - |-,+\rangle] = -\frac{\hbar^2}{4}|0,0\rangle$$

Les valeurs propres du produit $S_{az}.S_{bz}$ sont : $\pm\frac{\hbar^2}{4}$

4) En déduire la représentation matricielle de H dans la base couplée. On les rangera selon l'ordre s décroissant et m décroissant.

$$(H) = \begin{pmatrix} \langle 1,1|H|1,1\rangle & \langle 1,0|H|1,0\rangle & \langle 1,1|H|1,-1\rangle & \langle 0,0|H|0,0\rangle \\ \langle 1,0|H|1,1\rangle & \langle 1,0|H|1,0\rangle & \langle 1,0|H|1,-1\rangle & \langle 1,0|H|0,0\rangle \\ \langle 1,-1|H|1,1\rangle & \langle 1,-1|H|1,0\rangle & \langle 1,-1|H|1,-1\rangle & \langle 1,-1|H|0,0\rangle \\ \langle 0,0|H|1,1\rangle & \langle 0,0|H|1,0\rangle & \langle 0,0|H|1,-1\rangle & \langle 0,0|H|0,0\rangle \end{pmatrix}$$

Il est facile de montrer que :
$H|1,1\rangle = \beta\hbar^2|1,1\rangle$ $\qquad H|1,0\rangle = -2\beta\hbar^2|1,0\rangle$
$H|1,-1\rangle = \beta\hbar^2|1,-1\rangle$ $\qquad H|0,0\rangle = 0$
Et par conséquent, on écrit :

$$(H) = \beta\hbar^2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5) Donner les niveaux d'énergie et leurs dégénérescences.

Les niveaux d'énergies, notées $E_{s,m}$ sont :

$E_{1,1} = E_{1,-1} = \beta\hbar^2 = -\frac{\mu_0\hbar^2}{8\pi d^3}\gamma_a\gamma_b$
est deux fois dégénérée et associée aux 2 vecteurs propres : $|1,1\rangle$ et $|1,-1\rangle$
$E_{1,0} = -2\,\beta\hbar^2 = \frac{\mu_0\hbar^2}{4\pi d^3}\gamma_a\gamma_b$ est simple et associée au vecteur propre : $|1,0\rangle$
$E_{0,0} = 0$ est simple et associée au vecteur propre : $|0,0\rangle$

<u>B- Evolution</u>

Initialement, on prépare le système des deux électrons dans l'état :

$$|\psi(0)\rangle = |m_a,m_b\rangle = |+,-\rangle$$

1) Exprimer cet état en fonction des éléments de la base couplée.

$$\begin{cases} |1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|+,-\rangle + |-,+\rangle] \\ |0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|+,-\rangle - |-,+\rangle] \end{cases} \Rightarrow \quad |\psi(0)\rangle = |+,-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|1,0\rangle + |0,0\rangle]$$

2) Déterminer $|\psi(t)\rangle$dans la base couplée, puis dans la base découplée.

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{iHt}{\hbar}}|\psi(0)\rangle = \frac{e^{-\frac{iHt}{\hbar}}}{\sqrt{2}}(|1{,}0\rangle + |0{,}0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{+i2\beta\hbar t}|1{,}0\rangle + |0{,}0\rangle\right]$$

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}\left[\left(e^{+i2\beta\hbar t} + 1\right)|+,-\rangle + \left(e^{+i2\beta\hbar t} - 1\right)|-,+\rangle\right]$$

3) Quelle est la probabilité de trouver les deux spins avec la même projection c.à.d. les états $|m_a, m_b\rangle = |+,+\rangle$ ou $|m_a, m_b\rangle = |-,-\rangle$

$$\mathcal{P}(|+,+\rangle) = |\langle +,+|\psi(t)\rangle|^2 = |\langle 1{,}1|\psi(t)\rangle|^2 = 0$$
$$\mathcal{P}(|-,-\rangle) = |\langle -,-|\psi(t)\rangle|^2 = |\langle 1,-1|\psi(t)\rangle|^2 = 0$$

C- Effet d'un champ magnétique extérieur

Le champ magnétique dipolaire, aux distances considérées, est très faible, et peut a priori être perturbé par un champ extérieur non désiré. Nous nous contenterons de considérer le cas où le champ en question, noté
$\vec{B} = B\vec{z}$, est constant et uniforme. Dans ce cas-ci on posera $\gamma_a = \gamma_b = \gamma$

1) Donner l'expression du nouvel Hamiltonien H′ en fonction de H et de S_z, la composante du spin total suivant z.

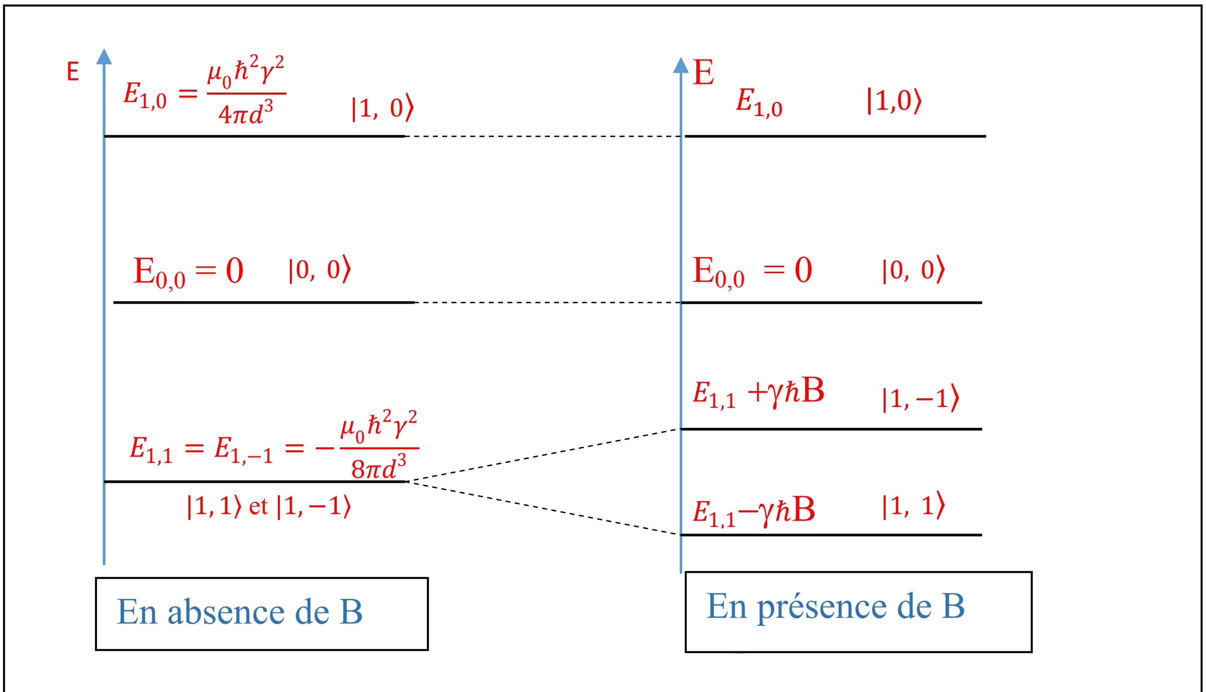
$$\vec{M} = \vec{M}_a + \vec{M}_b = \gamma\vec{S}_a + \gamma\vec{S}_b = \gamma\vec{S}$$
$$H' = H - \vec{M}\cdot\vec{B} = H - \gamma\vec{S}\cdot\vec{B} = H - \gamma B S_z$$

2) La base couplée, est-elle une base propre de H'. Exprimer les niveaux d'énergie en fonction de s et m. donner les énergies pour chaque état.Conclure.

D'après l'expression de H', on aura : $H'|s,m\rangle = (E_{s,m} - \gamma\hbar B m)|s,m\rangle$,

Soit : $H'|1{,}1\rangle = \left(-\frac{\mu_0\hbar^2}{8\pi d^3}\gamma^2 - \gamma\hbar B\right)|1{,}1\rangle$, $H'|1,-1\rangle = \left(-\frac{\mu_0\hbar^2}{8\pi d^3}\gamma^2 + \gamma\hbar B\right)|1,-1\rangle$

$H'|1{,}0\rangle = \left(\frac{\mu_0\hbar^2}{4\pi d^3}\gamma^2\right)|1{,}0\rangle$ et $H'|0{,}0\rangle = 0|0{,}0\rangle$



Conclusion : La présence d'un champ magnétique a pour effet de :
- laisser invariant les énergies $E_{1,0}$ *et* $E_{0,0}$
- lever la dégénérescence de l'énergie $E_{1,1}$ $(ou\ E_{1,-1})$

En d'autres termes, il y a une levée complète de la dégénérescence et par conséquent, l'hamiltonien H' forme ECOC.

34. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND d FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient, *e.g.*, for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.

Notation:

		J	J	...
		M	M	...
m_1	m_2	Coefficients		
m_1	m_2			
.	.			
.	.			
.	.			

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

$$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\Big(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\Big)$$

$$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta\, e^{2i\phi}$$

$$Y_\ell^{-m} = (-1)^m Y_\ell^{m*}$$

$$d^{\,\ell}_{m,0} = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\, Y_\ell^m\, e^{-im\phi}$$

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 J M\rangle = (-1)^{J-j_1-j_2}\langle j_2 j_1 m_2 m_1 | j_2 j_1 J M\rangle$$

1/2 × 1/2

m_1	m_2			
		J = 1, M = +1		
+1/2	+1/2	1		
		J = 1, M = 0	J = 0, M = 0	
+1/2	−1/2	1/2	1/2	
−1/2	+1/2	1/2	−1/2	
		J = 1, M = −1		
−1/2	−1/2	1		

1 × 1/2

m_1	m_2			
		J = 3/2, M = +3/2		
+1	+1/2	1		
		J = 3/2, M = +1/2	J = 1/2, M = +1/2	
+1	−1/2	1/3	2/3	
0	+1/2	2/3	−1/3	
		J = 3/2, M = −1/2	J = 1/2, M = −1/2	
0	−1/2	2/3	1/3	
−1	+1/2	1/3	−2/3	
		J = 3/2, M = −3/2		
−1	−1/2	1		

2 × 1

m_1	m_2			
		J = 3, M = +3		
+2	+1	1		
		J = 3, M = +2	J = 2, M = +2	
+2	0	1/3	2/3	
+1	+1	2/3	−1/3	
		J = 3, M = +1	J = 2, M = +1	J = 1, M = +1
+2	−1	1/15	1/3	3/5
+1	0	8/15	1/6	−3/10
0	+1	2/5	−1/2	1/10
		J = 3, M = 0	J = 2, M = 0	J = 1, M = 0
+1	−1	1/5	1/2	3/10
0	0	3/5	0	−2/5
−1	+1	1/5	−1/2	3/10
		J = 3, M = −1	J = 2, M = −1	J = 1, M = −1
0	−1	2/5	1/2	1/10
−1	0	8/15	−1/6	−3/10
−2	+1	1/15	−1/3	3/5
		J = 3, M = −2	J = 2, M = −2	
−1	−1	2/3	1/3	
−2	0	1/3	−2/3	
		J = 3, M = −3		
−2	−1	1		

1 × 1

m_1	m_2			
		J = 2, M = +2		
+1	+1	1		
		J = 2, M = +1	J = 1, M = +1	
+1	0	1/2	1/2	
0	+1	1/2	−1/2	
		J = 2, M = 0	J = 1, M = 0	J = 0, M = 0
+1	−1	1/6	1/2	1/3
0	0	2/3	0	−1/3
−1	+1	1/6	−1/2	1/3
		J = 2, M = −1	J = 1, M = −1	
0	−1	1/2	1/2	
−1	0	1/2	−1/2	
		J = 2, M = −2		
−1	−1	1		

3/2 × 1

m_1	m_2			
		J = 5/2, M = +5/2		
+3/2	+1	1		
		J = 5/2, M = +3/2	J = 3/2, M = +3/2	
+3/2	0	2/5	3/5	
+1/2	+1	3/5	−2/5	
		J = 5/2, M = +1/2	J = 3/2, M = +1/2	J = 1/2, M = +1/2
+3/2	−1	1/10	2/5	1/2
+1/2	0	3/5	1/15	−1/3
−1/2	+1	3/10	−8/15	1/6
		J = 5/2, M = −1/2	J = 3/2, M = −1/2	J = 1/2, M = −1/2
+1/2	−1	3/10	8/15	1/6
−1/2	0	3/5	−1/15	−1/3
−3/2	+1	1/10	−2/5	1/2
		J = 5/2, M = −3/2	J = 3/2, M = −3/2	
−1/2	−1	3/5	2/5	
−3/2	0	2/5	−3/5	
		J = 5/2, M = −5/2		
−3/2	−1	1		

2 × 1/2

m_1	m_2		
		J = 5/2, M = +5/2	
+2	+1/2	1	
		J = 5/2, M = +3/2	J = 3/2, M = +3/2
+2	−1/2	1/5	4/5
+1	+1/2	4/5	−1/5
		J = 5/2, M = +1/2	J = 3/2, M = +1/2
+1	−1/2	2/5	3/5
0	+1/2	3/5	−2/5
		J = 5/2, M = −1/2	J = 3/2, M = −1/2
0	−1/2	3/5	2/5
−1	+1/2	2/5	−3/5
		J = 5/2, M = −3/2	J = 3/2, M = −3/2
−1	−1/2	4/5	1/5
−2	+1/2	1/5	−4/5
		J = 5/2, M = −5/2	
−2	−1/2	1	

3/2 × 1/2

m_1	m_2		
		J = 2, M = +2	
+3/2	+1/2	1	
		J = 2, M = +1	J = 1, M = +1
+3/2	−1/2	1/4	3/4
+1/2	+1/2	3/4	−1/4
		J = 2, M = 0	J = 1, M = 0
+1/2	−1/2	1/2	1/2
−1/2	+1/2	1/2	−1/2
		J = 2, M = −1	J = 1, M = −1
−1/2	−1/2	3/4	1/4
−3/2	+1/2	1/4	−3/4
		J = 2, M = −2	
−3/2	−1/2	1	