UNIVERSITÉ IBN ZOHR
Faculté des Sciences d'Agadir
Département de Physique
AGADIR

Année Universitaire 2023-2024

Travaux dirigés de Mécanique du point matériel
Éléments du Corrigé de la Série N°1
Filière SMAI1

Solution de l'exercice 1

On donne les trois vecteurs $\vec{V}_1(1,1,0), \vec{V}_2(0,1,0)$ et $\vec{V}_3(0,0,2)$. Notons par $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base dans laquelle les différents vecteurs sont décomposés.

1. Calculons les normes des différents vecteurs et les vecteurs unitaires de leurs directions respectives

$$\left\|\vec{V}_1\right\| = \sqrt{1^2+1^2+0^2} = \sqrt{2} \Longrightarrow \vec{v}_1 = \frac{\vec{V}_1}{\left\|\vec{V}_1\right\|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

$$\left\|\vec{V}_2\right\| = \sqrt{0^2+1^2+0^2} = 1 \Longrightarrow \vec{v}_2 = \frac{\vec{V}_2}{\left\|\vec{V}_2\right\|} = (0,1,0)$$

$$\left\|\vec{V}_3\right\| = \sqrt{0^2+0^2+2^2} = \sqrt{4} = 2 \Longrightarrow \vec{v}_3 = \frac{\vec{V}_3}{\left\|\vec{V}_3\right\|} = (0,0,1)$$

2. On calcule $\cos\left(\widehat{\vec{v}_1, \vec{v}_2}\right)$ comme suit

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \|\vec{v}_1\| \, \|\vec{v}_2\| \cos\left(\widehat{\vec{v}_1, \vec{v}_2}\right) = \cos\left(\widehat{\vec{v}_1, \vec{v}_2}\right)$$
$$\Longrightarrow \cos\left(\widehat{\vec{v}_1, \vec{v}_2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. Nous avons

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \times \vec{e}_1 + 0 \times \vec{e}_2 - 0 \times \vec{e}_3 = (1,0,0)$$
$$\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3) = 1 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 0 = 1.$$

Le premier terme représente le produit scalaire entre les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$, il est égal au produit du module de la projection de $\vec{v}_1$ sur $\vec{v}_2$ multiplié par le module de $\vec{v}_2$. Le deuxième terme est le produit vectoriel entre $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$. Le dernier terme est le produit mixte entre $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ et qui n'est d'autre que le volume du parallélepipède contruit sur la base des trois vecteurs.

Solution de l'exercice 2

1. Nous avons

$$
\begin{aligned}
\vec{A} \wedge (\vec{B}+\vec{C}) = & \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x + C_x & B_y + C_y & B_z + C_z \end{vmatrix} \\
& = (A_y B_z - A_z B_y + A_y C_z - A_z C_y)\, \vec{i} + (-A_x B_z + A_z B_x - A_x C_z + A_z C_x)\, \vec{j} \\
& + (A_x B_y - A_y B_x + A_x C_y - A_y C_x)\, \vec{k} \\
& = (A_y B_z - A_z B_y)\, \vec{i} + (-A_x B_z + A_z B_x)\, \vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\, \vec{k} \\
& + (A_y C_z - A_z C_y)\, \vec{i} + (-A_x C_z + A_z C_x)\, \vec{j} + (A_x C_y - A_y C_x)\, \vec{k} \\
& = \vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \vec{C}.
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = & \Big(A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}\Big) . \\
& \Big((B_y C_z - B_z C_y)\, \vec{i} + (-B_x C_z + B_z C_x)\, \vec{j} + (B_x C_y - B_y C_x)\, \vec{k}\Big) \\
& = A_x B_y C_z - A_x B_z C_y - A_y B_x C_z + A_y B_z C_x + A_z B_x C_y - A_z B_y C_x \\
& = C_x (A_y B_z - A_z B_y) + C_y (-A_x B_z + A_z B_x) + C_z (A_x B_y - A_y B_x) \\
& = \vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B})
\end{aligned}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
& \vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{A} \wedge \Big((B_y C_z - B_z C_y)\, \vec{i} + (-B_x C_z + B_z C_x)\, \vec{j} + (B_x C_y - B_y C_x)\, \vec{k}\Big) \\
& = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_y C_z - B_z C_y & -B_x C_z + B_z C_x & B_x C_y - B_y C_x) \end{vmatrix} \\
& = (A_y B_x C_y - A_y B_y C_x + A_z B_x C_z - A_z B_z C_x)\, \vec{i} \\
& + (-A_x B_x C_y + A_x B_y C_x + A_z B_y C_z - A_z B_z C_y)\, \vec{j} \\
& + (-A_x B_x C_z + A_x B_z C_x - A_y B_y C_z + A_y B_z C_y)\, \vec{k} \\
& = (A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z)\, B_x \vec{i} - (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z)\, C_x \vec{i} \\
& + (A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z)\, B_y \vec{j} - (A_x B_x + A_y C_y + A_z B_z)\, C_y \vec{j} \\
& + (A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z))\, B_z \vec{k} - (A_x B_x + A_y B_y + A_z C_z)\, C_z \vec{k} \\
& = (A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z)\, \vec{B} - (A_x B_x + A_y B_y + A_z C_z)\Big)\, \vec{C} \\
& = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}.
\end{aligned}
$$

4.
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\vec{A}(t)\cdot\vec{B}(t)) &= \frac{d}{dt}\left(A_x(t)B_x(t)+A_y(t)B_y(t)+A_z(t)B_z(t)\right)\\
&= \frac{dA_x(t)}{dt}B_x(t)+A_x(t)\frac{dB_x(t)}{dt}+\frac{dA_y(t)}{dt}B_y(t)+A_y(t)\frac{dB_y(t)}{dt}\\
&+\frac{dA_z(t)}{dt}B_z(t)+A_z(t)\frac{dB_z(t)}{dt}\\
&= \frac{dA_x(t)}{dt}B_x(t)+\frac{dA_y(t)}{dt}B_y(t)+\frac{dA_z(t)}{dt}B_z(t)\\
&+A_x(t)\frac{dB_x(t)}{dt}+A_y(t)\frac{dB_y(t)}{dt}+A_z(t)\frac{dB_z(t)}{dt}\\
&= \frac{d\vec{A}(t)}{dt}\cdot\vec{B}(t)+\vec{A}(t)\cdot\frac{d\vec{B}}{dt}(t).
\end{aligned}$$

De la même manière, on démontre que $\frac{d}{dt}(\vec{A}(t)\wedge\vec{B}(t)) = \frac{d\vec{A}(t)}{dt}\wedge\vec{B}(t)+\vec{A}(t)\wedge\frac{d\vec{B}(t)}{dt}$.

Solution de l'exercice 3

1.
$$\vec{u}=\cos(\theta)\vec{i}+\sin(\theta)\vec{j}, \vec{v}=-\sin(\theta)\vec{i}+\cos(\theta)\vec{j}$$

2. Pour que le système $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ constitue une base O.N.D, if faut $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|=\|\vec{w}\|=1$ et $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{w}$ $\vec{u}\wedge\vec{v}=(\cos(\theta)\vec{i}+\sin(\theta)\vec{j})\wedge(-\sin(\theta)\vec{i}+\cos(\theta)\vec{j})=\vec{k}\Rightarrow\vec{w}=\vec{k}$

3.
$$\begin{aligned}
\left.\frac{d\vec{u}}{d\theta}\right|_R &= \left.\frac{d(\cos(\theta)\vec{i}+\sin(\theta)\vec{j})}{d\theta}\right|_R = -\sin(\theta)\vec{i}+\cos(\theta)\vec{j}=\vec{v}\\
\left.\frac{d\vec{v}}{d\theta}\right|_R &= \left.\frac{d(-\sin(\theta)\vec{i}+\cos(\theta)\vec{j})}{d\theta}\right|_R = -\cos(\theta)\vec{i}-\sin(\theta)\vec{j}=-\vec{u}
\end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned}
\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_R &= \left.\frac{d(\cos(\theta)\vec{i}+\sin(\theta)\vec{j})}{dt}\right|_R = -\dot{\theta}\sin(\theta)\vec{i}+\dot{\theta}\cos(\theta)\vec{j}=\dot{\theta}\vec{v}=\omega\vec{v}\\
\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_R &= \left.\frac{d(-\sin(\theta)\vec{i}+\cos(\theta)\vec{j})}{dt}\right|_R = -\dot{\theta}\cos(\theta)\vec{i}-\dot{\theta}\sin(\theta)\vec{j}=-\dot{\theta}\vec{u}=-\omega\vec{u}
\end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned}
&\left.\frac{d(\lambda\vec{r})}{dt}\right|_R = \lambda\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_R+\vec{r}\frac{d\lambda}{dt}\\
&\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_R = -b\sin(bt)\vec{i}+b\cos(bt)\vec{j}+2t\vec{k}, \frac{d\lambda}{dt} = -ae^{-at}\\
&\quad\Rightarrow \left.\frac{d(\lambda\vec{r})}{dt}\right|_R = e^{-at}\left[(-b\sin(bt)-a\cos(bt))\vec{i}+(b\cos(bt)-a\sin(bt))\vec{j}+\left(2t-at^2\right)\vec{k}\right]\\
&\left.\frac{d(\vec{u}\wedge\vec{r})}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_R\wedge\vec{r}+\vec{u}\wedge\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_R
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_R \wedge \vec{r} &= (-\omega\sin(\theta)\vec{i} + \omega\cos(\theta)\vec{j}) \wedge \left(\cos(bt)\vec{i} + \sin(bt)\vec{j} + t^2\vec{k}\right) \\
&= -\omega\sin(\theta)\sin(bt)\vec{k} + \omega\sin(\theta)t^2\vec{j} - \omega\cos(\theta)\cos(bt)\vec{k} + \omega\cos(\theta)t^2\vec{i} \\
&= \omega\cos(\theta)t^2\vec{i} + \omega\sin(\theta)t^2\vec{j} - (\omega\sin(\theta)\sin(bt) + \omega\cos(\theta)\cos(bt))\vec{k} \\
\vec{u} \wedge \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_R &= (\cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}) \wedge (-b\sin(bt)\vec{i} + b\cos(bt)\vec{j} + 2t\vec{k}) \\
&= \cos(\theta)b\cos(bt)\vec{k} - 2t\cos(\theta)\vec{j} + \sin(\theta)b\sin(bt)\vec{k} + 2t\sin(\theta)\vec{i} \\
&= 2t\sin(\theta)\vec{i} - 2t\cos(\theta)\vec{j} + (\cos(\theta)b\cos(bt) + \sin(\theta)b\sin(bt))\vec{k}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \left.\frac{d(\vec{u}\wedge\vec{r})}{dt}\right|_R &= \omega\cos(\theta)t^2\vec{i} + \omega\sin(\theta)t^2\vec{j} - (\omega\sin(\theta)\sin(bt) + \omega\cos(\theta)\cos(bt))\vec{k} \\
&\quad + 2t\sin(\theta)\vec{i} - 2t\cos(\theta)\vec{j}(\cos(\theta)b\cos(bt) + \sin(\theta)b\sin(bt))\vec{k}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \left.\frac{d(\vec{u}\wedge\vec{r})}{dt}\right|_R &= \left(\omega\cos(\theta)t^2 + 2t\sin(\theta)\right)\vec{i} + \left(\omega\sin(\theta)t^2 - 2t\cos(\theta)\right)\vec{j} \\
&\quad + (b-\omega)\cos(\theta - bt)\vec{k}
\end{aligned}
$$

Pour exprimer les dérivées $\left.\frac{d(\lambda\vec{r})}{dt}\right|_R$ et $\left.\frac{d(\vec{u}\wedge\vec{r})}{dt}\right|_R$ dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$, il faut exprimer $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ en fonction de la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

Solution de l'exercice 4

Soit $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère cartésien et considérons la base sphérique $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi)$.

1. Exprimons les vecteurs de la base sphérique dans la base cartésienne :

$$
\begin{aligned}
\vec{e}_r &= \cos\theta\vec{k} + \sin\theta\vec{e}_\rho \\
&= \cos\theta\vec{k} + \sin\theta(\cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}) \\
&= \cos\varphi\sin\theta\vec{i} + \sin\varphi\sin\theta\vec{j} + \cos\theta\vec{k}.
\end{aligned}
$$

nous sommes passés par le vecteur $\vec{e}_\rho$ de la base cylindrique. De même, pour $\vec{e}_\theta$, nous avons

$$
\begin{aligned}
\vec{e}_\theta &= -\sin\theta\vec{k} + \cos\theta\vec{e}_\rho \\
&= -\sin\theta\vec{k} + \cos\theta(\cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}) \\
&= \cos\varphi\cos\theta\vec{i} + \sin\varphi\cos\theta\vec{j} - \sin\theta\vec{k}.
\end{aligned}
$$

et finalement

$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}$$

2. Calculons les dérivées partielles suivantes sachant que les vecteurs de la base cartésienne sont fixes :

$$\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\theta} = \cos\varphi\cos\theta\vec{i} + \sin\varphi\cos\theta\vec{j} - \sin\theta\vec{k}$$

et

$$\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\varphi} = -\sin\varphi\sin\theta\vec{i} + \cos\varphi\sin\theta\vec{j}$$

et

$$\frac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial\theta} = -\cos\varphi\sin\theta\vec{i} - \sin\varphi\sin\theta\vec{j} - \cos\theta\vec{k}$$

et
$$\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \varphi} = -\sin\varphi\cos\theta\vec{i} + \cos\varphi\cos\theta\vec{j}$$
et
$$\frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \theta} = 0$$
et
$$\frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\cos\varphi\vec{i} - \sin\varphi\vec{j}.$$

3. Pour établir la différentielle de chacun des vecteurs de la base, on a
$$\begin{aligned} d\vec{e}_r &= \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi}d\varphi \\ &= (\cos\varphi\cos\theta\vec{i} + \sin\varphi\cos\theta\vec{j} - \sin\theta\vec{k})d\theta + (-\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j})\sin\theta d\varphi \\ &= d\theta\vec{e}_\theta + \sin\theta d\varphi\vec{e}_\varphi \end{aligned}$$
De la même manière, on établit la différentielle de $\vec{e}_\theta$ comme suit
$$\begin{aligned} d\vec{e}_\theta &= \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \varphi}d\varphi \\ &= (-\cos\varphi\sin\theta\vec{i} - \sin\varphi\sin\theta\vec{j} - \cos\theta\vec{k})d\theta + (-\sin\varphi\cos\theta\vec{i} + \cos\varphi\cos\theta\vec{j})d\varphi \\ &= -d\theta\vec{e}_r + \cos\theta d\varphi\vec{e}_\varphi \end{aligned}$$
et finalement
$$\begin{aligned} d\vec{e}_\varphi &= \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi}d\varphi \\ &= d\varphi(-\cos\varphi\vec{i} - \sin\varphi\vec{j}) \\ &= -d\varphi\vec{e}_\rho = -d\varphi\left(\sin\theta\vec{e}_r + \cos\theta\vec{e}_\theta\right) \end{aligned}$$

4. Pour cette question, il suffit de faire apparaitre les différentielles des vecteurs de la base sphérique sous la forme demandée. On a $\vec{k} = \cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta$, ce qui donne $\vec{k}\wedge\vec{e}_r = \sin\theta\vec{e}_\varphi, \vec{k}\wedge\vec{e}_\theta = \cos\theta\vec{e}_\varphi$ et $\vec{e}_\theta = \vec{e}_\varphi\wedge\vec{e}_r$, ainsi on peut écrire
$$\begin{aligned} d\vec{e}_r &= d\theta\vec{e}_\varphi\wedge\vec{e}_r + d\varphi\vec{k}\wedge\vec{e}_r \\ &= \left(dt\dot{\theta}\vec{e}_\varphi + dt\dot{\varphi}\vec{k}\right)\wedge\vec{e}_r \\ &= dt\vec{\Omega}\wedge\vec{e}_r \end{aligned}$$
avec $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{e}_\varphi + \dot{\varphi}\vec{k}$. De même, on a
$$\begin{aligned} d\vec{e}_\theta &= -d\theta\vec{e}_r + \cos\theta d\varphi\vec{e}_\varphi \\ &= d\theta\vec{e}_\varphi\wedge\vec{e}_\theta + d\varphi\vec{k}\wedge\vec{e}_\theta \\ &= dt\vec{\Omega}\wedge\vec{e}_\theta \end{aligned}$$
Finalement, reprenons la différentielle de $\vec{e}_\varphi$:
$$\begin{aligned} d\vec{e}_\varphi &= -dt\dot{\varphi}\left(\sin\theta\vec{e}_r + \cos\theta\vec{e}_\theta\right) \\ &= -dt\dot{\varphi}\left(\sin\theta\vec{e}_\theta\wedge\vec{e}_\varphi - \cos\theta\vec{e}_r\wedge\vec{e}_\varphi\right) \\ &= -dt\dot{\varphi}\left(\sin\theta\vec{e}_\theta - \cos\theta e_r\right)\wedge\vec{e}_\varphi \\ &= dt\dot{\varphi}\vec{k}\wedge\vec{e}_\varphi \\ &= dt\vec{\Omega}\wedge\vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

Les dérivées par rapport au temps s'obtiennent facilement en divisant par dt :

$$\left.\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_r \quad \left.\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\theta \quad \left.\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\varphi.$$

5. Considérons cette fois-ci la base cylindrique. Le seul angle qui varie est φ, d'où le vecteur rotation de la base cylindrique par rapport à la base cartésienne est $\vec{\Omega} = \dot{\varphi}\vec{k}$. En appliquant les résultats précédents, on obtient

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_{\mathcal{R}} &= \dot{\varphi}\vec{k} \wedge \vec{e}_\rho = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \\
\left.\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}\right|_{\mathcal{R}} &= \dot{\varphi}\vec{k} \wedge \vec{e}_\varphi = -\dot{\varphi}\vec{e}_\rho \\
\left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} &= 0
\end{aligned}$$

6. Soit $\vec{V} = V_r\vec{e}_r + V_\theta\vec{e}_\theta + V_\varphi\vec{e}_\varphi$. Sa dérivée par rapport au temps est

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{V}}{dt} &= \frac{dV_r}{dt}\vec{e}_r + V_r\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \frac{dV_\theta}{dt}\vec{e}_\theta + V_\theta\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} + \frac{dV_\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi + V_\varphi\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} \\
&= \frac{dV_r}{dt}\vec{e}_r + \frac{dV_\theta}{dt}\vec{e}_\theta + \frac{dV_\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi + V_r\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_r + V_\theta\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\theta + V_\varphi\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\varphi \\
&= \frac{dV_r}{dt}\vec{e}_r + \frac{dV_\theta}{dt}\vec{e}_\theta + \frac{dV_\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi + \vec{\Omega} \wedge (V_r\vec{e}_r + V_\theta\vec{e}_\theta + V_\varphi\vec{e}_\varphi) \\
&= \frac{dV_r}{dt}\vec{e}_r + \frac{dV_\theta}{dt}\vec{e}_\theta + \frac{dV_\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi + \vec{\Omega} \wedge \vec{V}
\end{aligned}$$

qui reste une relation générale.

Solution de l'exercice 5

Considérons un repère cartésien $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient $\left(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k}\right)$ et $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ respectivement les bases cylindrique et sphérique. Soit M un point repéré par $\overrightarrow{OM}$ par rapport à $\mathcal{R}$. On considère un déplacement infinitésimal de M en M' tel que M' est très proche de M. On note alors le déplacement élémentaire par $\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = d\overrightarrow{MM'} = d\overrightarrow{OM}$

1. La base cartésienne est fixe et donc la dérivée de ces vecteurs par rapport au temps dans $\mathcal{R}$ est nulle. D'où, le déplacement élementaire dans cette base est

$$d\overrightarrow{OM} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}.$$

2. Le vecteur rotation de la base cylindrique dans $\mathcal{R}$ est $\vec{\Omega} = \dot{\varphi}\vec{k}$. Ceci peut être démontré facilement en explicitant la base cylindrique dans la base cartésienne. Le déplacement élémentaire dans cette base est

$$\begin{aligned}
d\overrightarrow{OM} &= d\left(\rho\vec{e}_\rho + z\vec{k}\right) = d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\vec{e}_\rho + dz\vec{k} \\
&= d\rho\vec{e}_\rho + \rho dt\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\rho + dz\vec{k} \\
&= d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\varphi\vec{k} \wedge \vec{e}_\rho + dz\vec{k} = d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\varphi\vec{e}_\varphi + dz\vec{k}
\end{aligned}$$

3. Pour ce qui est de la base sphérique, le vecteur rotation est $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{e}_\varphi + \dot{\varphi}\vec{k} = \dot{\theta}\vec{e}_\varphi + \dot{\varphi}\left(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta\right)$. Ainsi pour le déplacement élémentaire dans cette base, on trouve

$$\begin{aligned}
d\overrightarrow{OM} &= d\left(r\vec{e}_r\right) = dr\vec{e}_r + rd\vec{e}_r \\
&= dr\vec{e}_r + rdt\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_r \\
&= dr\vec{e}_r + r\left(d\theta\vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_r + d\varphi\left[\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta\right] \wedge \vec{e}_r\right) \\
&= dr\vec{e}_r + r\left(d\theta\vec{e}_\theta + d\varphi\vec{e}_\varphi\right) \\
&= dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + rd\varphi\sin\theta\vec{e}_\varphi
\end{aligned}$$