Année Universitaire 2023-2024
10 Juillet 2024
Session de Rattrapage

Université Ibn Zohr
Faculté des Sciences d'Agadir
Département de Physique

Examen de Mécanique Quantique I - SMP4

DURÉE 1H30 - AUCUN DOCUMENT N'EST AUTORISÉ
N. B. : TOUTE RÉPONSE NON DÉMONTRÉE OU NON JUSTIFIÉE NE SERA PAS NOTÉE !

Problème 1 Etude d'un puits de potentiel infini (10 pts)

Dans l'espace à une dimension, une particule quantique de masse m et d'énergie E est enfermée dans un puits de potentiel infini :

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{pour} \quad a \leq x \leq b, \\ +\infty & \text{pour} \quad x < a \quad \text{ou} \quad x > b\ . \end{cases}$$

avec : $0 < a < b$ et $0 < V_0 < E$.

1. Tracer l'allure de l'énergie potentielle.
2. (a) Écrire l'équation de Schrödinger indépendante du temps pour la région : $a \leq x \leq b$.
   (b) Justifier que la fonction d'onde est nulle dans les régions $x < a$ et $x > b$.
   (c) Montrer que la dérivée première de la fonction d'onde est discontinue aux points $x = a$ et $x = b$.
3. Sachant que la solution générale de l'équation précédente est de la forme
   $$\phi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$
   donner l'expression et la dimension de k.
4. En utilisant la condition à la limite au point $x = a$, montrer que
   $$\phi(x) = \beta \sin\left[k(x-\alpha)\right]$$
   On explicitera α et β en fonction des données du problème.
5. En utilisant la condition à la limite au point $x = b$ imposée à la fonction d'onde, montrez que le vecteur d'onde k peut être exprimé en fonction de a, b et n (où n est un entier naturel).
6. (a) En déduire l'expression de $\phi_n(x)$ en fonction de n.
   (b) Quelles sont les valeurs que peut prendre l'entier naturel n ?
   (c) Tracer les deux premières fonctions d'onde.

7. (a) En déduire que l'énergie de la particule s'écrit sous la forme :

$$E_n = Dn^2 + V_0$$

On explicitera D en fonction des données du problème.

(b) Peut-on avoir $E_n = V_0$? Justifier.

$\boxed{\textit{Problème}\,2}$ Probabilité de transition dans une molécule diatomique (10 pts)

On considère l'électron d'une molécule formée de deux atomes A et B. Soient $|\phi_A\rangle$ et $|\phi_B\rangle$ les deux kets orthonormés qui décrivent l'état de cet électron lorsqu'il est localisé autour de A et de B respectivement. L'hamiltonien H qui décrit l'état d'énergie de l'électron est de la forme :

$$H = H_0 + W$$

H_0 décrit l'électron lorsqu'il est localisé autour des atomes A et B. L'observable W rend compte de la possibilité pour l'électron de passer d'un atome à l'autre. Ces deux observables sont définies dans la base $\{|\phi_A\rangle, |\phi_B\rangle\}$ par :

$$\begin{array}{lcl} H_0\,|\phi_A\rangle = E_0\,|\phi_A\rangle & , & H_0\,|\phi_B\rangle = E_0\,|\phi_B\rangle \\ W\,|\phi_A\rangle = -a\,|\phi_B\rangle & , & W\,|\phi_B\rangle = -a\,|\phi_A\rangle \end{array}$$

E_0 et a sont des constantes réelles.

1. (a) Écrire la matrice représentant H dans la base $\{|\phi_A\rangle, |\phi_B\rangle\}$.

   (b) Déterminer les valeurs propres E_+ et E_- de l'observable H.

   (c) Déterminer les états propres $|\phi_+\rangle$ et $|\phi_-\rangle$ de H correspondant à ces deux valeurs propres.

On suppose qu'à l'instant initial $t = 0$, l'électron est localisé autour de l'atome B, c'est-à-dire que son état initial est $|\psi(0)\rangle = |\phi_B\rangle$.

2. (a) Déterminer, dans la base $\{|\phi_A\rangle, |\phi_B\rangle\}$, l'état $|\psi(t)\rangle$ de l'électron à l'instant $t > 0$.

   (b) Donner les probabilités $P_A(t)$ et $P_B(t)$ que l'électron soit localisé autour des atomes A et B à l'instant $t > 0$.

   (c) Tracer l'allure de $P_B(t)$ en fonction du temps. Conclure.

   (d) Donner les instants t_n où l'électron est parfaitement localisé autour de l'atome B.

   (e) Quelle est la période d'oscillation de l'électron entre les atomes A et B ?