

T.D. de M. Q. 2 – SMP5 – Série n° 4
Théorie des perturbations stationnaires

Problème 1 : Oscillateur harmonique perturbé

Soit H_0 l'hamiltonien d'un oscillateur harmonique à une dimension :

$$H_0 = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2$$

Les énergies propres de H_0 sont notées $E_n^{(0)}$ et les vecteurs propres associés $|\varphi_n^{(0)}\rangle = |n\rangle$.

Le système, subissant l'action d'une perturbation W , est décrit par l'hamiltonien total $H = H_0 + W$.

1. Perturbation linéaire

$$W = \lambda \hbar \omega \hat{X}$$

avec $\hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X$ et λ est un paramètre réel, sans dimension, très inférieur à 1.

a. Calcul exact :

- i. Écrire H sous la forme suivante :

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 (X - X_0)^2 + \varepsilon_0 \cdot I$$

où X_0 et ε_0 sont des constantes que l'on déterminera et I l'opérateur identité.

- ii. En déduire les énergies propres E_n de l'hamiltonien H .

b. Développement de perturbation :

- i. Calculer jusqu'au deuxième ordre de perturbation les énergies propres E_n de H .
ii. Calculer, au premier ordre de perturbation, le vecteur d'état $|\phi_n\rangle$ de H .

2. Perturbation quadratique

$$W = \frac{1}{2}\rho \hbar \omega \hat{X}^2 = \frac{1}{2}\rho m\omega^2 X^2$$

où ρ est un paramètre réel, sans dimension, très inférieur à 1.

- a. Par un calcul direct, déterminer les énergies propres E_n de l'hamiltonien total H .
b. Retrouver ce résultat à partir de la théorie des perturbations stationnaires.
c. Calculer, au premier ordre des perturbations, le vecteur d'état $|\phi_n\rangle$ de l'hamiltonien total H .

Problème 2 : Perturbation stationnaire d'un système à trois niveaux

Un système à trois niveaux, décrit par l'hamiltonien H_0 , est soumis à l'action d'une interaction W . Dans une base orthonormée $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$, H_0 et W sont représentés par les matrices suivantes :

$$H_0 = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad W = \hbar \begin{pmatrix} a & b & ic \\ b & 0 & b \\ -ic & b & 0 \end{pmatrix}$$

On suppose que ω , a , b et c sont des constantes réelles ayant la dimension d'une pulsation, et que les quantités a , b et c sont très petites devant ω .

1. Calculer, au premier ordre et au second ordre de perturbation, les corrections au niveau fondamental de H_0 . Calculer, au premier ordre, les corrections au vecteur propre de ce niveau.
2. Calculer, au premier ordre, les corrections au niveau excité de H_0 , et à l'ordre zéro, les corrections au vecteur propre de ce niveau.

Problème 3 : Moment cinétique $j = 1$ dans un champ magnétique

On considère un système quantique de moment cinétique $j = 1$. Le sous-espace \mathcal{E}_1 à trois dimensions, associé au système, est rapporté à la base $\{|j=1, m\rangle\}$ que l'on classera **par ordre décroissant** de m . L'hamiltonien H_0 du système est :

$$H_0 = aJ_z + \frac{b}{\hbar}J_z^2$$

où a et b sont deux constantes positives, ayant les dimensions d'une pulsation.

1. Quels sont les niveaux d'énergie du système ?
2. On applique un champ magnétique statique \vec{B} dans la direction Ox de vecteur unitaire \vec{e}_x . L'interaction du champ \vec{B} avec le moment magnétique du système $\vec{M} = \gamma \vec{J}$ (γ est le rapport gyromagnétique, supposé négatif) est décrite par l'hamiltonien $W = -\vec{M} \cdot \vec{B}$. La constante $\omega = -\gamma B$ est la pulsation de Larmor. L'hamiltonien total du système est alors : $H = H_0 + W$

Calculer la matrice représentant W dans la base $\{|1, m\rangle\}$.

3. On suppose que $b = a$ et que $\omega \ll a$.
 - a. Calculer, **au premier ordre** de perturbation, l'énergie propre du **niveau fondamental** et, à **l'ordre zéro**, le **vecteur propre** correspondant.
 - b. Calculer, **au premier ordre** puis **au second ordre** de perturbation, l'énergie propre du **niveau excité**.
 - c. Calculer le vecteur propre **au premier ordre** de perturbation.

T.D. de M. Q. 2 – SMP5 – Série n° 4
Théorie des perturbations stationnaires

Corrigé

Problème 1 : Oscillateur harmonique perturbé

1. Perturbation linéaire

a. Calcul exact :

i. Expression de l'hamiltonien H du système :

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2 + \lambda \hbar \omega \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \left(X + \lambda \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \right)^2 - \frac{\lambda^2}{2} \hbar \omega$$

L'hamiltonien H s'écrit alors sous la forme :

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 (X - X_0)^2 + \varepsilon_0 \cdot I$$

avec :

$$X_0 = -\lambda \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \quad \text{et} \quad \varepsilon_0 = -\frac{1}{2} \lambda^2 \hbar \omega$$

ii. Détermination des énergies propres E_n de H :

On a :

$$H = H' + \varepsilon_0 \cdot I$$

H' est l'hamiltonien d'un oscillateur harmonique à une dimension :

$$H' = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X'^2, \quad X' = X - X_0$$

Son équation aux valeurs propres est :

$$H'|n\rangle = E'_n |n\rangle, \quad E'_n = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n \in \mathbb{N}$$

L'équation aux valeurs propres de $H = H' + \varepsilon_0$ est alors :

$$H|n\rangle = (H' + \varepsilon_0)|n\rangle = E_n |n\rangle \Rightarrow E_n = E'_n + \varepsilon_0$$

D'où les énergies propres de H :

$$E_n = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \lambda^2 \hbar \omega$$

b. Calcul par la théorie des perturbations stationnaires :

$$W = \lambda \hbar \omega \hat{X} = \lambda \hbar \omega \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X \quad ; \quad X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a^+ + a)$$

Donc :

$$W = \frac{\lambda \hbar \omega}{\sqrt{2}} (a^+ + a)$$

i. **Correction $E_n^{(1)}$ au premier ordre des niveaux d'énergie :**

$$E_n^{(1)} = \langle n | W | n \rangle = \frac{\lambda \hbar \omega}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{n+1} \langle n | n+1 \rangle + \sqrt{n} \langle n | n-1 \rangle \right] = 0$$

▪ **Correction $E_n^{(2)}$ au deuxième ordre des niveaux d'énergie :**

$$E_n^{(2)} = \sum_{k \neq n} \frac{|\langle k | W | n \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} = \lambda^2 \hbar m \omega^3 \sum_{k \neq n} \frac{|\langle k | X | n \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}}$$

Or :

$$\langle k | X | n \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left[\sqrt{n+1} \langle k | n+1 \rangle + \sqrt{n} \langle k | n-1 \rangle \right] = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left[\sqrt{n+1} \delta_{k,n+1} + \sqrt{n} \delta_{k,n-1} \right]$$

Donc :

$$E_n^{(2)} = \frac{1}{2} \lambda^2 \hbar^2 \omega^2 \left[\frac{n+1}{E_n^{(0)} - E_{n+1}^{(0)}} + \frac{n}{E_n^{(0)} - E_{n-1}^{(0)}} \right]$$

Comme :

$$E_n^{(0)} - E_{n+1}^{(0)} = -\hbar \omega \quad \text{et} \quad E_n^{(0)} - E_{n-1}^{(0)} = \hbar \omega$$

Alors :

$$E_n^{(2)} = \frac{1}{2} \lambda^2 \hbar \omega [-n-1+n] = -\frac{1}{2} \lambda^2 \hbar \omega$$

Les énergies propres E_n calculées au deuxième ordre de perturbation sont :

$$E_n = E_n^{(0)} + E_n^{(1)} + E_n^{(2)} = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \lambda^2 \hbar \omega$$

On retrouve les énergies propres calculées par la méthode directe.

ii. **vecteur propre $|\phi_n\rangle$ de H au premier ordre de la perturbation :**

$$\begin{aligned} |\phi_n\rangle &\approx |n\rangle + \sum_{k \neq n} \frac{\langle k | W | n \rangle}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} |k\rangle = |n\rangle + \frac{\lambda \hbar \omega}{\sqrt{2}} \left[\frac{\sqrt{n+1}}{-\hbar \omega} |n+1\rangle + \frac{\sqrt{n}}{\hbar \omega} |n-1\rangle \right] \\ &\approx |n\rangle - \lambda \sqrt{\frac{n+1}{2}} |n+1\rangle + \lambda \sqrt{\frac{n}{2}} |n-1\rangle \end{aligned}$$

Sous l'effet de la perturbation W , l'état $|n\rangle$ est contaminé par les états $|n+1\rangle$ et $|n-1\rangle$.

2. Perturbation quadratique

a. **Calcul exact des énergies propres E_n de l'hamiltonien H total du système :**

L'hamiltonien H total du système s'écrit :

$$H = H_0 + W = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(1 + \rho)X^2$$

Donc, les énergies propres E_n de l'hamiltonien H total du système s'obtiennent à partir de celle de l'hamiltonien non perturbé en changeant la pulsation ω en $\omega' = \omega\sqrt{1 + \rho}$:

$$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega' = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega\sqrt{1 + \rho}$$

b. Application de la théorie des perturbations stationnaires :

$$\begin{aligned} X^2 &= \frac{\hbar}{2m\omega} (a^+ + a)^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} \left((a^+)^2 + a^2 + 2a^+a + I \right) \\ \Rightarrow W &= \frac{1}{2}\rho m\omega^2 X^2 = \frac{1}{4}\rho\hbar\omega \left((a^+)^2 + a^2 + 2a^+a + I \right) \end{aligned}$$

▪ **Correction au premier ordre de l'énergie :**

$$E_n^{(1)} = \langle n | W | n \rangle = \frac{1}{4}\rho\hbar\omega \langle \varphi_n | (2a^+a + I) | n \rangle$$

Donc :

$$E_n^{(1)} = \frac{1}{2}\rho\hbar\omega(n + \frac{1}{2})$$

▪ **Correction au deuxième ordre de l'énergie :**

$$E_n^{(2)} = \sum_{k \neq n} \frac{|\langle k | W | n \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} = \frac{1}{4}\rho^2 m^2 \omega^4 \sum_{k \neq n} \frac{|\langle k | X^2 | n \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}}$$

On a :

$$\langle k | X^2 | n \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \left[\sqrt{(n+1)(n+2)} \delta_{k,n+2} + \sqrt{n(n-1)} \delta_{k,n-2} + 2n\delta_{k,n} + \delta_{k,n} \right]$$

Comme $k \neq n$, la correction au second ordre est :

$$\begin{aligned} E_n^{(2)} &= \frac{1}{4}\rho^2 m^2 \omega^4 \frac{\hbar^2}{4m^2 \omega^2} \left[\frac{(n+1)(n+2)}{-2\hbar\omega} + \frac{n(n-1)}{2\hbar\omega} \right] \\ &= \frac{1}{32}\rho^2 \hbar\omega [-(n+1)(n+2) + n(n-1)] = \frac{-1}{8}\rho^2 \hbar\omega \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \end{aligned}$$

L'énergie propre E_n de l'hamiltonien H total est alors :

$$\begin{aligned} E_n &\approx E_n^{(0)} + E_n^{(1)} + E_n^{(2)} + \dots \\ &\approx \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2}\rho\hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{8}\rho^2 \hbar\omega \left(\frac{n}{2} + 1 \right) + \dots \\ &\approx \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \left(1 + \frac{\rho}{2} - \frac{\rho^2}{8} + \dots \right) \end{aligned}$$

▪ **Comparaison avec le calcul direct :**

Le calcul exact des énergies propres de H a donné l'expression suivante :

$$E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega' = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega \sqrt{1 + \rho}$$

En développant le radical, au second ordre en ρ , on a :

$$\sqrt{1 + \rho} = 1 + \frac{\rho}{2} - \frac{\rho^2}{8} + \dots \Rightarrow E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega \left(1 + \frac{\rho}{2} - \frac{\rho^2}{8} + \dots \right)$$

On retrouve alors les énergies propres calculées par la théorie des perturbations.

c. Vecteur d'état $|\phi_n\rangle$ de l'hamiltonien total H au premier ordre des perturbations :

$$\begin{aligned} |\phi_n\rangle &= |n\rangle + \sum_{k \neq n} \frac{\langle k | W | n \rangle}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} |k\rangle + \dots = |n\rangle + \frac{1}{2} \rho m \omega^2 \sum_{k \neq n} \frac{\langle k | X^2 | n \rangle}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} |k\rangle + \dots \\ \Rightarrow |\phi_n\rangle &= |n\rangle + \frac{1}{8} \rho \left(-\sqrt{(n+1)(n+2)} |n+2\rangle + \sqrt{n(n-1)} |n-2\rangle \right) + \dots \end{aligned}$$

Problème 2 : Perturbation stationnaire d'un système à trois niveaux

Dans la base orthonormée $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$, les matrices de H_0 et de W sont :

$$H_0 = \hbar \omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad W = \hbar \begin{pmatrix} a & b & ic \\ b & 0 & b \\ -ic & b & 0 \end{pmatrix}$$

Les niveaux d'énergie de H_0 sont :

- niveau fondamental d'énergie $E_1^{(0)} = \hbar \omega$ (non dégénéré) de vecteur propre $|u_1\rangle$;
- niveau excité d'énergie $E_2^{(0)} = 2\hbar \omega$ (dégénéré) de vecteurs propres $|u_2\rangle$ et $|u_3\rangle$.

1. Corrections au niveau fondamental (non dégénéré) de H_0 :

a. Correction, au premier ordre de perturbation, à l'énergie :

$$E_1^{(1)} = \langle u_1 | W | u_1 \rangle = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & ic \\ b & 0 & b \\ -ic & b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \hbar a \Rightarrow E_1^{(1)} = \hbar a$$

b. Correction, au second ordre de perturbation, à l'énergie :

$$E_1^{(2)} = \frac{|\langle u_2 | W | u_1 \rangle|^2}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}} + \frac{|\langle u_3 | W | u_1 \rangle|^2}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}} = \frac{-1}{\hbar \omega} \left[|\langle u_2 | W | u_1 \rangle|^2 + |\langle u_3 | W | u_1 \rangle|^2 \right]$$

Comme

$$\langle u_2 | W | u_1 \rangle = \hbar b \quad ; \quad \langle u_3 | W | u_1 \rangle = -i \hbar c$$

Donc :

$$E_1^{(2)} = \frac{-\hbar(b^2 + c^2)}{\omega}$$

Ainsi, au second ordre de perturbation, la correction à l'énergie du niveau fondamental de H_0 est :

$$E_1 \approx \hbar\omega + \hbar a - \frac{\hbar(b^2 + c^2)}{\omega}$$

c. Correction, au premier ordre de perturbation, au vecteur propre $|u_1\rangle$:

$$\begin{aligned} |\psi_1^{(1)}\rangle &= \frac{1}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}} [\langle u_2 | W | u_1 \rangle |u_2\rangle + \langle u_3 | W | u_1 \rangle |u_3\rangle] \\ \Rightarrow |\psi_1^{(1)}\rangle &= \frac{-b}{\omega} |u_2\rangle + \frac{ic}{\omega} |u_3\rangle \end{aligned}$$

Ainsi, au premier ordre de perturbation, le vecteur propre associé au niveau fondamental est :

$$|\psi_1\rangle = |u_1\rangle - \frac{b}{\omega} |u_2\rangle + \frac{ic}{\omega} |u_3\rangle$$

2. Corrections au niveau excité (dégénéré) de H_0 :

Le niveau excité de H_0 est doublement dégénéré : énergie $E_2^{(0)} = 2\hbar\omega$ de vecteurs propres $|u_2\rangle$ et $|u_3\rangle$. Pour calculer les corrections à l'énergie et aux vecteurs propres, il faut diagonaliser la restriction de la matrice d'interaction au sous-espace engendré par les vecteurs $|u_2\rangle$ et $|u_3\rangle$, soit :

$$W = \begin{pmatrix} 0 & \hbar b \\ \hbar b & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres et les vecteurs propres de cette matrice sont :

$$\begin{aligned} \varepsilon_+ = \hbar b & : |\varepsilon_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |u_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |u_3\rangle \\ \varepsilon_- = -\hbar b & : |\varepsilon_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |u_2\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |u_3\rangle \end{aligned}$$

a. Correction au premier ordre à l'énergie :

$$E_{2+}^{(1)} = \varepsilon_+ = \hbar b \quad ; \quad E_{2-}^{(1)} = \varepsilon_- = -\hbar b$$

Le niveau excité se divise en deux sous-niveaux d'énergies respectives :

$$E_{2+} = 2\hbar\omega + \hbar b \quad ; \quad E_{2-} = 2\hbar\omega - \hbar b$$

b. Vecteurs propres à l'ordre zéro :

Le vecteur propre associé à chaque sous-niveaux est donné, à l'ordre zéro, par :

$$|\psi_{2+}^{(0)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |u_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |u_3\rangle \quad ; \quad |\psi_{2-}^{(0)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |u_2\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |u_3\rangle$$

Problème 3 : Moment cinétique $j = 1$ dans un champ magnétique

Le système quantique est de moment cinétique $j = 1$. Le sous-espace \mathcal{E}_1 à trois dimensions est rapporté à la base $\{|1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle\}$. L'hamiltonien H_0 du système est :

$$H_0 = aJ_z + \frac{b}{\hbar}J_z^2$$

où a et b sont deux constantes positives, ayant les dimensions d'une pulsation.

1. Les niveaux d'énergie du système :

On a :

$$H_0|1,m\rangle = \left(aJ_z + \frac{b}{\hbar}J_z^2\right)|1,m\rangle = (am\hbar + bm^2\hbar)|1,m\rangle$$

Donc :

$$H_0|1,1\rangle = (a+b)\hbar|1,1\rangle$$

$$H_0|1,0\rangle = 0|1,0\rangle$$

$$H_0|1,-1\rangle = (b-a)\hbar|1,-1\rangle$$

Les niveaux d'énergie de H_0 (hamiltonien non perturbé) sont alors :

$$E_{+1}^{(0)} = (a+b)\hbar, \quad E_0^{(0)} = 0, \quad E_{-1}^{(0)} = (b-a)\hbar$$

2. Matrice représentant W dans la base $\{|1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle\}$:

L'hamiltonien d'interaction du champ \vec{B} avec le moment magnétique du système $\vec{M} = \gamma \vec{J}$ est :

$$W = -\vec{M} \cdot \vec{B} = \omega J_x$$

$\omega = -\gamma B$ est la pulsation de Larmor. D'où :

$$W = \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. On suppose que $b = a$ et que $\omega \ll a$. Les niveaux d'énergie de H_0 sont :

- Niveau fondamental :

$$E_0^{(0)} = E_{-1}^{(0)} = 0 : \text{énergie propre 2 fois dégénérée} \Rightarrow \text{états propres : } |1,0\rangle \text{ et } |1,-1\rangle$$

- Niveau excité :

$$E_{+1}^{(0)} = 2a\hbar : \text{énergie propre non dégénérée} \Rightarrow \text{état propre : } |1,1\rangle$$

a. Corrections à l'énergie propre et au vecteur propre du niveau fondamental :

Ce niveau d'énergie est dégénéré, il faut alors diagonaliser la restriction de la matrice de W au sous-espace engendré par les vecteurs $|1,0\rangle$ et $|1,-1\rangle$:

$$\frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres et les vecteurs propres correspondants sont :

$$\varepsilon_+ = \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}} \quad : \quad |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,0\rangle + |1,-1\rangle) \quad \text{et} \quad \varepsilon_- = -\frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}} \quad : \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,0\rangle - |1,-1\rangle)$$

Les valeurs propres ε_+ et ε_- sont les corrections à l'ordre 1 à l'énergie : $\varepsilon_+ = E_{0+}^{(1)}$; $\varepsilon_- = E_{0-}^{(1)}$.

Le niveau fondamental dégénéré se divise en deux sous – niveaux d'énergies respectives :

$$E_{0+} = E_0^{(0)} + \varepsilon_+ = \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad E_{0-} = E_0^{(0)} + \varepsilon_- = -\frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}}$$

Les vecteurs propres associés $|+\rangle$ et $|-\rangle$ sont les états propres à l'ordre zéro :

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,0\rangle + |1,-1\rangle) \quad \text{et} \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,0\rangle - |1,-1\rangle)$$

D'où la levée de la dégénérescence de ce niveau par la perturbation.

b. Corrections à l'énergie propre du niveau excité :

Le niveau excité d'énergie $E_{+1}^{(0)} = 2a\hbar$ est non dégénéré, le vecteur propre correspondant est $|1,1\rangle$.

▪ Au premier ordre de perturbation :

$$E_{+1}^{(1)} = \langle 1,1|W|1,1\rangle = 0$$

Donc, au premier ordre de perturbation, ce niveau n'est pas modifié.

▪ Au second ordre de perturbation :

$$E_{+1}^{(2)} = \frac{1}{E_{+1}^{(0)} - E_0^{(0)}} \left[\langle 1,-1|W|1,1\rangle^2 + \langle 1,0|W|1,1\rangle^2 \right] = \frac{1}{2a\hbar} \left[0 + \left(\frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}} \right)^2 \right] = \frac{\hbar\omega^2}{4a}$$

Donc :

$$E_{+1}^{(2)} = \frac{\hbar\omega^2}{4a}$$

Ainsi, au second ordre de perturbation, l'énergie du niveau excité est :

$$E_{+1} = E_{+1}^{(0)} + E_{+1}^{(1)} + E_{+1}^{(2)} = 2a\hbar + \frac{\hbar\omega^2}{4a}$$

c. Vecteur propre au premier ordre de perturbation :

$$|\psi_{+1}^{(1)}\rangle = \frac{1}{E_{+1}^{(0)} - E_0^{(0)}} \left[\langle 1,-1|W|1,1\rangle |1,-1\rangle + \langle 1,0|W|1,1\rangle |1,0\rangle \right] = \frac{1}{2a\hbar} \left[0 + \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}} |1,0\rangle \right]$$

Ainsi, au premier ordre de perturbation, le vecteur propre est :

$$|\psi_{+1}\rangle = |1,1\rangle + \frac{\omega}{2\sqrt{2}a} |1,0\rangle$$

Diagramme d'énergie :

