UNIVERSITE IBN ZOHR
FACULTE DES SCIENCES
AGADIR

جامعة ابن زهر
كلية العلوم، أكادير

Recueil d'examens corrigés

de

Mécanique Quantique 2

Filière : SMP5

Edition : 2020 - 2021

UNIVERSITÉ IBN ZOHR
FACULTÉ DES SCIENCES
AGADIR

Année universitaire 2019 - 2020
Session normale – 25 Décembre 2019
Pr. NASSIK

Examen de Mécanique Quantique 2 – SMP5

Durée : 2 h 00 - Aucun document n'est autorisé

Question de cours (3 points) :

On considère une particule de masse m plongée dans un potentiel central $V(r)$.

1. a. Ecrire, en coordonnées sphériques, l'équation de Schrödinger satisfaite par la fonction d'onde $\psi(r,\theta,\varphi)$ des états stationnaires d'énergie E.

On rappelle l'expression du Laplacien en coordonnées sphériques :

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r.f) - \frac{L^2}{\hbar^2 r^2}(f)$$

b. Dire pourquoi la fonction d'onde peut s'écrire sous la forme factorisée :

$$\psi(r,\theta,\varphi) = R(r)\Theta(\theta,\varphi)$$

où $R(r)$ est la fonction d'onde radiale et $\Theta(\theta,\varphi)$ sont des fonctions ne dépendant que de θ et φ. Définir les fonctions $\Theta(\theta,\varphi)$.

2. Pour une valeur de l fixée, donner l'équation différentielle satisfaite par $R(r)$.

3. En posant $\chi(r) = r\,R(r)$, montrer que l'on obtient une équation de Schrödinger à une dimension d'une particule de masse m dans un potentiel effectif $V_l(r)$ que l'on déterminera.

Problème (17 points) : Oscillateur harmonique plan perturbé

Soit H_0 l'hamiltonien d'une particule de masse m, se déplaçant dans le plan Oxy :

$$H_0 = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{P_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(X^2 + Y^2)$$

ω étant la pulsation du mouvement.

Cette particule est soumise à l'effet d'une perturbation W donnée par l'expression :

$$W = \lambda m\omega^2 X\,Y$$

où λ est une constante positive inférieure à l'unité $(\lambda << 1)$.

L'hamiltonien total de la particule s'écrit alors :

$$H = H_0 + W$$

1. Donner les valeurs propres de H_0, leur degré de dégénérescence, et les vecteurs propres associés. On introduira les nombres quantiques n_x, n_y et $n = n_x + n_y$.

Reporter dans le tableau ci-dessous les énergies propres et les états propres pour le niveau fondamental ($n=0$) et les deux premiers niveaux excités ($n=1$ et $n=2$).

n	$E_n^{(0)}$	n_x	n_y	$\left\|\varphi_n^{(0)}\right\rangle = \left\|n_x, n_y\right\rangle$	g_n

2. Ecrire l'expression de la perturbation W en fonction des opérateurs (a_x^+ , a_x) et (a_y^+ , a_y).

On donne :

$$a_x = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, X + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\, P_x \quad ; \quad a_y = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, Y + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\, P_y$$

3. Effet de la perturbation sur le niveau fondamental ($n=0$)

a. Calculer la correction au premier ordre de perturbation à l'énergie $E_0^{(1)}$.

b. Calculer la correction au deuxième ordre de perturbation à l'énergie $E_0^{(2)}$.

c. Calculer la correction au premier ordre de perturbation au vecteur propre $\left|\varphi_0^{(1)}\right\rangle$.

4. Effet de la perturbation sur le premier niveau excité ($n=1$)

a. Déterminer la matrice représentant la restriction $W^{(1)}$ de la matrice de perturbation au sous – espace propres associé à ce niveau $\mathscr{E}_1$.

b. Calculer :

i. La correction, au premier ordre de perturbation, à l'énergie de ce niveau.

ii. La correction, à l'ordre zéro de perturbation, au vecteur propre.

5. Effet de la perturbation sur le deuxième niveau excité ($n=2$)

a. Déterminer la matrice représentant la restriction $W^{(2)}$ de la matrice de perturbation au sous – espace propres associé à ce niveau $\mathscr{E}_2$.

b. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de cette matrice.

c. En déduire :

i. La correction, au premier ordre de perturbation, à l'énergie de ce niveau.

ii. La correction, à l'ordre zéro de perturbation, au vecteur propre.

6. Résumer sur un diagramme d'énergie, l'effet de la perturbation sur les trois niveaux étudiés.

UNIVERSITÉ IBN ZOHR
FACULTÉ DES SCIENCES
AGADIR

Année universitaire 2019 - 2020
Session normale – 25 Décembre 2019
Pr. NASSIK

Examen de Mécanique Quantique 2 – SMP5

Corrigé

Question de cours (3 points) :

1. Equation de Schrödinger, en coordonnées sphériques, satisfaite par la fonction d'onde $\psi(r,\theta,\varphi)$ des états stationnaires d'énergie E.

a. L'opérateur hamiltonien du système en coordonnées sphériques est :

$$H=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+V(r)=-\frac{\hbar^2}{2mr}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r+\frac{L^2}{2mr^2}+V(r)$$

L'équation de Schrödinger indépendante du temps satisfaite par les états stationnaires du système $\psi(r,\theta,\varphi)$ est :

0,5

$$\boxed{\left[-\frac{\hbar^2}{2mr}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r+\frac{L^2}{2mr^2}+V(r)\right]\psi(r,\theta,\varphi)=E\,\psi(r,\theta,\varphi)} \quad (*)$$

b. Factorisation de la fonction d'onde :

On a :

$$H=\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2mr}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r+V(r)}_{H_r}+\frac{L^2}{2mr^2}$$

Les opérateurs L^2 et L_z qui n'agissent que sur les variables angulaires $\Omega=(\theta,\varphi)$, commutent avec l'opérateur H_r et par suite avec H :

$$[H,L^2]=[H,L_z]=0$$

Par conséquent, l'ensemble $\{H,L^2,L_z\}$ **est un ECOC dans l'espace des états du système** $\mathcal{E}=\mathcal{E}_r\otimes\mathcal{E}_\Omega$. Par conséquent, on impose aux fonctions propres $\psi(r,\theta,\varphi)$ de l'hamiltonien H d'être aussi fonctions propres de L^2 et L_z :

0,5

$$\begin{aligned}&H\,\psi(r,\theta,\varphi)=E\,\psi(r,\theta,\varphi)\\&L^2\,\psi(r,\theta,\varphi)=\hbar^2 l(l+1)\,\psi(r,\theta,\varphi)\\&L_z\,\psi(r,\theta,\varphi)=m\hbar\,\psi(r,\theta,\varphi)\end{aligned}$$

Pour cela, on factorise les fonctions propres $\psi(r,\theta,\varphi)$ sous la forme :

$$\psi(r,\theta,\varphi)=R(r)Y_l^m(\theta,\varphi)$$

où $R(r)$ est la fonction d'onde radiale et $Y_l^m(\theta,\varphi)$ sont les harmoniques sphériques, états propres communs à L^2 et L_z.

2. L'équation différentielle satisfaite par la fonction radiale $R(r)$:

L'équation de Schrödinger $(*)$ décrivant l'évolution de l'état stationnaire s'écrit alors :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2mr}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r+\frac{L^2}{2mr^2}+V(r)\right]R(r)Y_l^m(\theta,\varphi)=E\ R(r)Y_l^m(\theta,\varphi)$$

Pour l fixé, on a :

$$\frac{L^2}{2mr^2}R(r)Y_l^m(\theta,\varphi)=\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}R(r)Y_l^m(\theta,\varphi)$$

Donc :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2mr}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r+\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}+V(r)\right]R(r)Y_l^m(\theta,\varphi)=E\ R(r)Y_l^m(\theta,\varphi)$$

En divisant par $Y_l^m(\theta,\varphi)$ on obtient l'équation différentielle satisfaite par la fonction radiale $R(r)$:

1

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2mr}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\big(rR(r)\big)+\left(\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}+V(r)\right)R(r)=E\ R(r)}$$

3. On pose : $\chi(r)=r\,R(r) \quad\Rightarrow\quad R(r)=\dfrac{\chi(r)}{r}$, donc :

$$-\frac{\hbar^2}{2mr}\frac{d^2\chi(r)}{dr^2}+\left(\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}+V(r)\right)\frac{\chi(r)}{r}=E\ \frac{\chi(r)}{r}$$

En multipliant cette équation par r, on obtient :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\chi(r)}{dr^2}+\underbrace{\left(\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}+V(r)\right)}_{V_l(r)}\chi(r)=E\ \chi(r)$$

D'où l'équation de Schrödinger d'un système unidimensionnel, d'état propre $\chi(r)$, plongé dans le potentiel $V_l(r)$:

1

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\chi(r)}{dr^2}+V_l(r)\ \chi(r)=E\ \chi(r)} \quad \text{avec} \quad \boxed{V_l(r)=\frac{\hbar^2\, l(l+1)}{2mr^2}+V(r)}$$

Problème (18 points) : Oscillateur harmonique plan perturbé

1. Energie propres $E_n^{(0)}$ et états propres de l'hamiltonien non perturbé H_0 :

On a :

$$H_0=\frac{P_x^2}{2m}+\frac{P_y^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2\left(X^2+Y^2\right)=\underbrace{\left(\frac{P_x^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2X^2\right)}_{H_x}+\underbrace{\left(\frac{P_y^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2Y^2\right)}_{H_y}=\tilde{H}_x+\tilde{H}_y$$

où :

$$\tilde{H}_x=H_x\otimes \mathrm{I}_y \quad , \quad \tilde{H}_y=\mathrm{I}_x\otimes H_y$$

H_x et H_y sont les observables hamiltoniens relatifs à la direction x et y, respectivement. Leurs équations aux valeurs propres s'écrivent :

$$H_x|n_x\rangle = E_{n_x}|n_x\rangle = \hbar\omega(n_x + \frac{1}{2})|n_x\rangle \quad , \quad n_x \in \mathbb{N}$$

$$H_y|n_y\rangle = E_{n_y}|n_y\rangle = \hbar\omega(n_y + \frac{1}{2})|n_y\rangle \quad , \quad n_y \in \mathbb{N}$$

Les observables H_0, $\widetilde{H}_x$ et $\widetilde{H}_y$ commutent deux à deux ; ils possèdent alors un système de vecteurs propres communs. Ces vecteurs sont donnés par le produit tensoriel des vecteurs propres de H_x et de H_y :

0,5 $$\boxed{|n\rangle = |n_x\rangle \otimes |n_y\rangle = |n_x\rangle|n_y\rangle = |n_x, n_y\rangle}$$

Les énergies propres de H_0 sont :

$$E_n^{(0)} = E_{n_x} + E_{n_y} = \hbar\omega(n_x + n_y + 1)$$

Soit en posant $n = n_x + n_y$:

0,5 $$\boxed{E_n^{(0)} = \hbar\omega(n+1)} \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

Le degré de dégénérescence d'un niveau d'énergie n est $g_n = n+1$.

Tableau récapitulatif

1

n	$E_n^{(0)}$	n_x	n_y	$\lvert\varphi_n^{(0)}\rangle = \lvert n_x, n_y\rangle$	g_n
0	$\hbar\omega$	0	0	$\lvert 0,0\rangle$	1
1	$2\hbar\omega$	1	0	$\lvert 1,0\rangle$	2
		0	1	$\lvert 0,1\rangle$	
2	$3\hbar\omega$	2	0	$\lvert 2,0\rangle$	3
		1	1	$\lvert 1,1\rangle$	
		0	2	$\lvert 0,2\rangle$	

2. Expressions de la perturbation W en fonction des opérateurs (a_x^+, a_x) et (a_y^+, a_y) :

L'expression de la perturbation W est :

$$W = \lambda m\omega^2 X\,Y \quad ; \quad (\lambda << 1)$$

Comme les opérateurs de position et d'impulsion s'expriment en fonction des opérateurs de création et d'annihilation $(a_x^+ \, , a_x)$ et $(a_y^+ \, , a_y)$ propres à chaque dimension sous la forme :

$$X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(a_x^+ + a_x) \quad \text{et} \quad Y = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(a_y^+ + a_y)$$

alors :

$$W = \lambda\, m\omega^2 X\, Y = \lambda\, m\omega^2 \,\frac{\hbar}{2m\omega}\,(a_x^+ + a_x)(a_y^+ + a_y)$$

Donc :

0,5

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\lambda\,\hbar\omega\,(a_x^+ + a_x)(a_y^+ + a_y)}$$

3. Effet de la perturbation sur le niveau fondamental ($n = 0$)

Le niveau fondamental $(n = 0)$ n'est pas dégénéré :

$$E_0^{(0)} = \hbar\omega \qquad ; \qquad \left|\varphi_0^{(0)}\right\rangle = |0{,}0\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle$$

a. Correction, au premier ordre de perturbation, de l'énergie $E_0^{(1)}$:

0,5

$$\boxed{E_0^{(1)} = \langle 0{,}0|W|0{,}0\rangle}$$

$$E_0^{(1)} = \lambda\, m\omega^2 \langle 0|X|0\rangle\langle 0|Y|0\rangle = \lambda\frac{\hbar\omega}{2}\langle 0|(a_x^+ + a_x)|0\rangle\langle 0|(a_y^+ + a_y)|0\rangle = 0$$

La correction à l'énergie au premier ordre est nulle :

0,5

$$\boxed{E_0^{(1)} = 0}$$

b. Correction, au deuxième ordre de perturbation, de l'énergie $E_0^{(2)}$:

0,5

$$\boxed{E_0^{(2)} = \sum_{n = n_x + n_y \neq 0} \frac{\left|\langle n_x, n_y|W|0{,}0\rangle\right|^2}{E_0^{(0)} - E_n^{(0)}}}$$

Calculons l'élément de matrice $\langle n_x, n_y|W|0{,}0\rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle n_x, n_y|W|0{,}0\rangle &= \lambda\frac{\hbar\omega}{2}\langle n_x|(a_x^+ + a_x)|0\rangle\langle n_y|(a_y^+ + a_y)|0\rangle \\
&= \lambda\frac{\hbar\omega}{2}\Big[\langle n_x|a_x^+|0\rangle + \langle n_x|a_x|0\rangle\Big]\Big[\langle n_y|a_y^+|0\rangle + \langle n_y|a_y|0\rangle\Big] \\
&= \lambda\frac{\hbar\omega}{2}\Big[\langle n_x|1\rangle + 0\Big]\Big[\langle n_y|1\rangle + 0\Big]
\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\langle n_x, n_y|W|0{,}0\rangle = \frac{1}{2}\lambda\,\hbar\omega\,\delta_{n_x,1}.\delta_{n_y,1}}$$

Dans la somme donnant $E_0^{(2)}$, le seul élément de matrice non nul est celui correspondant à $n_x = 1$ et $n_y = 1$, c'est-à-dire à $n = 2$:

$$\langle 1,1|W|0,0\rangle = \frac{1}{2}\lambda\hbar\omega$$

La correction à l'énergie au deuxième ordre est :

$$E_0^{(2)} = \frac{1}{4}\lambda^2\hbar^2\omega^2\left(\frac{1}{E_0^{(0)} - E_2^{(0)}}\right) = \frac{1}{4}\lambda^2\hbar^2\omega^2\left(\frac{1}{\hbar\omega - 3\hbar\omega}\right)$$

Soit :

1 $$\boxed{E_0^{(2)} = -\frac{1}{8}\lambda^2\hbar\omega}$$

L'énergie du niveau fondamental corrigé au deuxième ordre de perturbation est donc :

0,5 $$E_0 \approx E_0^{(0)} + E_0^{(1)} + E_0^{(2)} \qquad \Rightarrow \qquad E_0 \approx \hbar\omega\left(1 - \frac{\lambda^2}{8}\right)$$

c. Correction au premier ordre de perturbation au vecteur propre $|\varphi_0^{(1)}\rangle$:

0,5 $$\boxed{|\varphi_0^{(1)}\rangle = \sum_{n=n_x+n_y\neq 0} \frac{\langle n_x,n_y|W|0,0\rangle}{E_0^{(0)} - E_n^{(0)}}|n_x,n_y\rangle}$$

Comme $\langle n_x,n_y|W|0,0\rangle = \frac{1}{2}\lambda\hbar\omega\ \delta_{n_x,1}.\delta_{n_y,1}$, donc :

1 $$|\varphi_0^{(1)}\rangle = \frac{1}{2}\lambda\hbar\omega\left(\sum_{n=n_x+n_y\neq 0}\frac{\delta_{n_x,1}.\delta_{n_y,1}}{E_0^{(0)} - E_n^{(0)}}|n_x,n_y\rangle\right) = \frac{1}{2}\lambda\hbar\omega\left(\frac{1}{E_0^{(0)} - E_2^{(0)}}\right)|1,1\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\lambda\hbar\omega\left(\frac{1}{\hbar\omega - 3\hbar\omega}\right)|1,1\rangle = -\frac{1}{4}\lambda|1,1\rangle$$

D'où le vecteur d'état au premier ordre de perturbation :

0,5 $$|\varphi_0\rangle \approx |\varphi_0^{(0)}\rangle + |\varphi_0^{(1)}\rangle \qquad \Rightarrow \qquad |\varphi_0\rangle \approx |0,0\rangle - \frac{1}{4}\lambda|1,1\rangle$$

4. Effet de la perturbation sur le premier niveau excité ($n=1$)

Le premier niveau excité d'énergie $E_1^{(0)} = 2\hbar\omega$, est doublement dégénéré. Soit $\mathscr{E}_1 = \{|1,0\rangle, |0,1\rangle\}$ le sous espace propre associé à ce niveau.

a. La matrice représentant la restriction de W au sous – espace propres $\mathscr{E}_1$ est :

$$W^{(1)} = \begin{pmatrix} \langle 1,0|W|1,0\rangle & \langle 1,0|W|0,1\rangle \\ \langle 0,1|W|1,0\rangle & \langle 0,1|W|0,1\rangle \end{pmatrix}$$

$$W|1,0\rangle = \lambda\frac{\hbar\omega}{2}\left[(a_x^+ + a_x)|1\rangle\right]\otimes\left[(a_y^+ + a_y)|0\rangle\right] = \lambda\frac{\hbar\omega}{2}|0\rangle|1\rangle = \frac{1}{2}\lambda\hbar\omega|0,1\rangle$$

$$W|0,1\rangle = \lambda\frac{\hbar\omega}{2}\left[(a_x^+ + a_x)|0\rangle\right]\otimes\left[(a_y^+ + a_y)|1\rangle\right] = \lambda\frac{\hbar\omega}{2}|1\rangle|0\rangle = \frac{1}{2}\lambda\hbar\omega|1,0\rangle$$

Donc, les seuls éléments de matrice non nuls sont :

$$\langle 0,1|W|1,0\rangle = \langle 1,0|W|0,1\rangle = \frac{1}{2}\lambda\hbar\omega$$

D'où la restriction de la matrice d'interaction dans $\mathscr{E}_1 = \{|1,0\rangle, |0,1\rangle\}$:

1

$$W^{(1)} = \frac{1}{2}\lambda\hbar\omega\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres et les vecteurs propres de cette matrice sont :

- $\varepsilon_+ = \frac{1}{2}\lambda\hbar\omega \quad \Rightarrow \quad |\varepsilon_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|1,0\rangle + |0,1\rangle\right]$
- $\varepsilon_- = -\frac{1}{2}\lambda\hbar\omega \quad \Rightarrow \quad |\varepsilon_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|1,0\rangle - |0,1\rangle\right]$

b. i. Correction, au premier ordre de perturbation, à l'énergie :

Les valeurs propres $\varepsilon_\pm = \pm\frac{1}{2}\lambda\hbar\omega$ représentent les corrections au premier ordre de perturbation, à l'énergie :

0,5 $\quad \boxed{E_1^{[1]} = \varepsilon_+ = \frac{1}{2}\lambda\hbar\omega} \quad$ et $\quad \boxed{E_1^{[2]} = \varepsilon_- = -\frac{1}{2}\lambda\hbar\omega} \quad$ 0,5

Donc, ce niveau d'énergie se divise en deux sous – niveaux d'énergies respectives :

0,5 $\quad \boxed{E_{1+} = 2\hbar\omega + \frac{1}{2}\lambda\hbar\omega \quad ; \quad E_{1-} = 2\hbar\omega - \frac{1}{2}\lambda\hbar\omega}$

Le terme d'interaction a levé la dégénérescence du premier niveau excité.

ii. Le vecteur d'état à l'ordre zéro de perturbation est :

A l'énergie $E_{1+} = 2\hbar\omega + \frac{1}{2}\lambda\hbar\omega$ est associé le vecteur propre :

0,5 $\quad \boxed{|\varphi_{1+}^{[0]}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|1,0\rangle + |0,1\rangle\right]}$

A l'énergie $E_{1-} = 2\hbar\omega - \frac{1}{2}\lambda\hbar\omega$ est associé le vecteur propre :

0,5 $\quad \boxed{|\varphi_{1-}^{[0]}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|1,0\rangle - |0,1\rangle\right]}$

5. Effet de la perturbation sur le deuxième niveau excité ($n = 2$)

Ce niveau d'énergie $E_2^{(0)} = 3\hbar\omega$, est trois fois dégénéré et de vecteurs propres : $|2,0\rangle, |1,1\rangle$ et $|0,2\rangle$. Soit $\mathscr{E}_2$ le sous espace propre associé à ce niveau d'énergie :

$$\mathscr{E}_2 = \{|2,0\rangle, |1,1\rangle, |0,2\rangle\}.$$

a. La matrice représentant la restriction de W au sous – espace propres $\mathscr{E}_2$ est :

$$W^{(2)}=\begin{pmatrix}\langle 2,0|W|2,0\rangle & \langle 2,0|W|1,1\rangle & \langle 2,0|W|0,2\rangle\\ \langle 1,1|W|2,0\rangle & \langle 1,1|W|1,1\rangle & \langle 1,1|W|0,2\rangle\\ \langle 0,2|W|2,0\rangle & \langle 0,2|W|1,1\rangle & \langle 0,2|W|0,2\rangle\end{pmatrix}$$

$$W\,|\,2,0\rangle=\lambda\frac{\hbar\omega}{2}\left[(a_x^+ + a_x)|\,2\rangle\right]\otimes\left[(a_y^+ + a_y)\,|\,0\rangle\right]$$

$$=\lambda\frac{\hbar\omega}{2}\left[\underbrace{a_x^+|\,2\rangle}_{=0}+a_x|\,2\rangle\right]\otimes\left[a_y^+|\,0\rangle+\underbrace{a_y|\,0\rangle}_{=0}\right]=\lambda\frac{\hbar\omega}{2}\sqrt{2}|\,1\rangle\otimes|\,1\rangle=\frac{\lambda\hbar\omega}{\sqrt{2}}\,|\,1,1\rangle$$

$$W\,|\,1,1\rangle=\lambda\frac{\hbar\omega}{2}\left[(a_x^+ + a_x)|\,1\rangle\right]\otimes\left[(a_y^+ + a_y)\,|\,1\rangle\right]$$

$$=\lambda\frac{\hbar\omega}{2}\left[a_x^+|\,1\rangle+a_x|\,1\rangle\right]\otimes\left[a_y^+|\,1\rangle+a_y|\,1\rangle\right]=\lambda\frac{\hbar\omega}{2}\left[\sqrt{2}|\,2\rangle+|\,0\rangle\right]\otimes\left[\sqrt{2}|\,2\rangle+|\,0\rangle\right]$$

$$=\frac{\lambda\hbar\omega}{\sqrt{2}}\left[|\,2,0\rangle+|\,0,2\rangle\right]$$

$$W\,|\,0,2\rangle=\lambda\frac{\hbar\omega}{2}\left[(a_x^+ + a_x)|\,0\rangle\right]\otimes\left[(a_y^+ + a_y)\,|\,2\rangle\right]$$

$$=\lambda\frac{\hbar\omega}{2}\left[a_x^+|\,0\rangle+\underbrace{a_x|\,0\rangle}_{=0}\right]\otimes\left[\underbrace{a_y^+|\,2\rangle}_{=0}+a_y|\,2\rangle\right]=\lambda\frac{\hbar\omega}{2}\sqrt{2}|\,1\rangle\otimes|\,1\rangle=\frac{\lambda\hbar\omega}{\sqrt{2}}\,|\,1,1\rangle$$

Donc, les seuls éléments de matrice non nuls sont :

$$\langle 1,1|W|2,0\rangle=\langle 2,0|W|1,1\rangle=\langle 0,2|W|1,1\rangle=\langle 1,1|W|0,2\rangle=\frac{\lambda\hbar\omega}{\sqrt{2}}$$

D'où la matrice représentant $W^{(2)}$ dans $\mathscr{E}_2=\left\{|\,2,0\rangle\,,|\,1,1\rangle\,,|\,0,2\rangle\right\}$:

1,5

$$\boxed{W^{(2)}=\frac{\lambda\hbar\omega}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}}$$

b. Les valeurs propres et les vecteurs propres de cette matrice :

$$\begin{vmatrix}-x&1&0\\1&-x&1\\0&1&-x\end{vmatrix}=0\quad\Rightarrow\quad x\,(x^2-2)=0$$

$$\Rightarrow\quad x=\sqrt{2}\quad,\quad x=0\quad,\quad x=-\sqrt{2}$$

Les valeurs propres de la matrice d'interaction sont alors :

0,5

$$\boxed{\varepsilon_+=\lambda\hbar\omega\quad,\quad\varepsilon_0=0\quad,\quad\varepsilon_-=-\lambda\hbar\omega}$$

- **Vecteurs propres de $W^{(2)}$:**

- La valeur propre $\varepsilon_+ = \lambda\hbar\omega$:

On cherche le vecteur $|\varepsilon_+\rangle = \alpha\,|2,0\rangle + \beta\,|1,1\rangle + \gamma\,|0,2\rangle$ tel que :

$$W|\varepsilon_+\rangle = \varepsilon_+|\varepsilon_+\rangle \qquad \text{et} \qquad \langle\varepsilon_+|\varepsilon_+\rangle = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1$$

$$W|\varepsilon_+\rangle = \varepsilon_+|\varepsilon_+\rangle \;\Rightarrow\; \frac{\lambda\hbar\omega}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \frac{\lambda\hbar\omega}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha+\gamma \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda\hbar\omega\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \alpha = \gamma = \frac{\beta}{\sqrt{2}}$$

La relation d'orthonormalisation devient :

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1 \;\Rightarrow\; 4|\alpha|^2 = 1 \;\Rightarrow\; |\alpha| = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \alpha = \gamma = \frac{1}{2}e^{i\theta}\,,\ \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}$$

1

$$|\varepsilon_+\rangle = \frac{e^{i\theta}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; |\varepsilon_+\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

car un vecteur d'état est défini à un facteur de phase $e^{i\theta}$ de module égal à 1 près.

- La valeur propre $\varepsilon_0 = 0$:

On cherche le vecteur $|\varepsilon_0\rangle = \alpha\,|u_1\rangle + \beta\,|u_1\rangle + \gamma\,|u_1\rangle$ tel que :

$$W|\varepsilon_0\rangle = 0 \qquad \text{et} \qquad \langle\varepsilon_0|\varepsilon_0\rangle = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1$$

$$W|\varepsilon_0\rangle = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\lambda\hbar\omega}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \frac{\lambda\hbar\omega}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha+\gamma \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{cases} \alpha = -\gamma \\ \beta = 0 \end{cases}$$

La relation d'orthonormalisation devient :

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1 \;\Rightarrow\; 2|\alpha|^2 = 1 \;\Rightarrow\; |\alpha| = \frac{1}{\sqrt{2}} \;\Rightarrow\; \alpha = -\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}$$

1

$$|\varepsilon_0\rangle = \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; |\varepsilon_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

car un vecteur d'état est défini à un facteur de phase $e^{i\theta}$ de module égal à 1 près.

- La valeur propre $\varepsilon_- = -\lambda\hbar\omega$:

De la même façon, on calcule le vecteur propre associé à la valeur propre $\varepsilon_- = -\lambda\hbar\omega$:

1

$$|\varepsilon_-\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

c. i. Corrections, au premier ordre de perturbation, à l'énergie :

Les corrections, au premier ordre de perturbation, au deuxième niveau excité de H_0 sont données par les valeurs propres de $W^{(2)}$. Ainsi, sous l'effet de la perturbation, le deuxième niveau excité (triplement dégénéré) de H_0 se divise en trois sous-niveaux d'énergies suivantes :

0,5 $$E_{2,+} = (3+\lambda)\hbar\omega \quad ; \quad E_{2,0} = 3\hbar\omega \quad ; \quad E_{2,+} = (3-\lambda)\hbar\omega$$

La dégénérescence du deuxième niveau excité de H_0 a été totalement levée.

ii. Corrections, à l'ordre zéro de perturbation, au vecteur d'état :

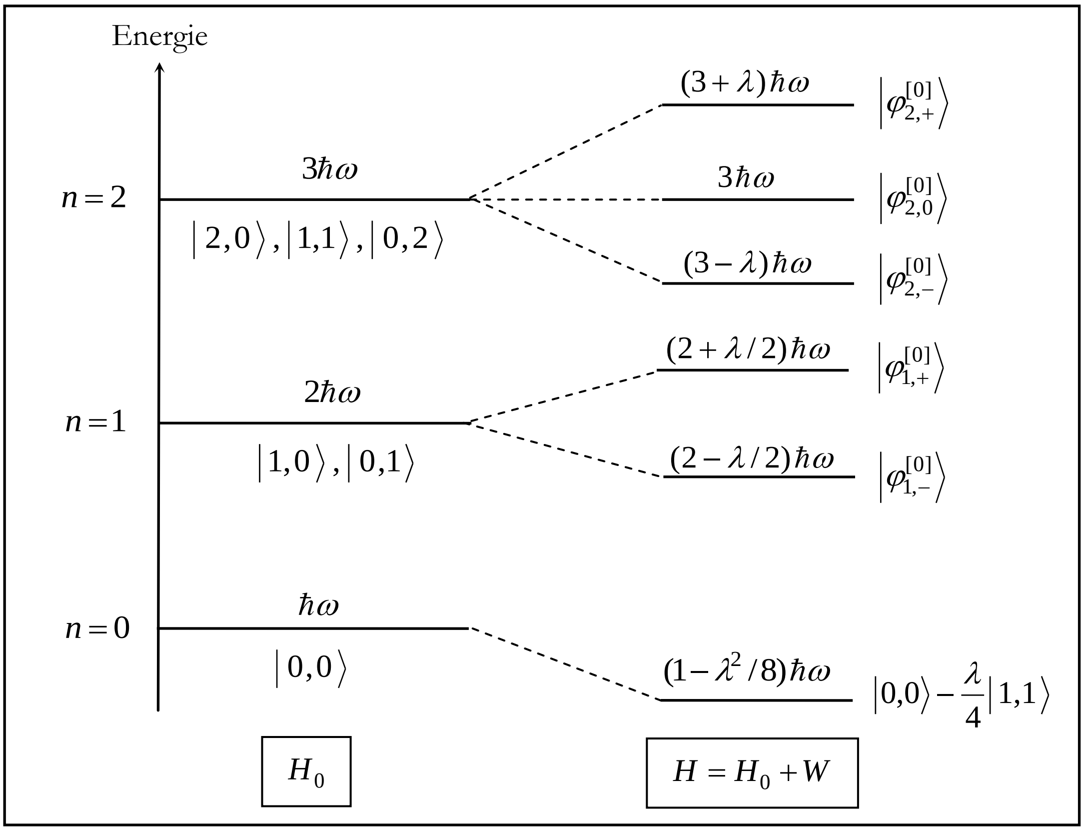
Les vecteurs d'état, à l'ordre zéro de perturbation, sont donnés par les vecteurs propres de la matrice de $W^{(2)}$:

0,5

- Le vecteur propre associé à l'énergie $E_{2,+} = (3+\lambda)\hbar\omega$ est $\left|\varphi_{2,+}^{[0]}\right\rangle = |\,\varepsilon_+\rangle$
- Le vecteur propre associé à l'énergie $E_{2,0} = 3\hbar\omega$ est $\left|\varphi_{2,0}^{[0]}\right\rangle = |\,\varepsilon_0\rangle$
- Le vecteur propre associé à l'énergie $E_{2,-} = (3-\lambda)\hbar\omega$ est : $\left|\varphi_{2,-}^{[0]}\right\rangle = |\,\varepsilon_-\rangle$

6. Diagramme d'énergie :

1



UNIVERSITÉ IBN ZOHR
FACULTÉ DES SCIENCES
AGADIR

Année universitaire 2019 - 2020
Session de rattrapage – 10 Janvier 2020
Pr. NASSIK

Examen de Mécanique Quantique 2 – SMP5

Durée 2 h 00 - Aucun document n'est autorisé

Problème I (12 points) : Un moment cinétique $l=1$ dans un champ électrique

On considère un système physique de moment cinétique orbital $\vec{L}$ caractérisé par le nombre quantique $l=1$. L'espace des états de ce système est rapporté à la base constituée par les vecteurs propres $|l,m\rangle$ communs à L^2 et L_z.

En présence d'un champ électrique extérieur, l'hamiltonien du système s'écrit :

$$H=\frac{\omega}{\hbar}(L_x^2-L_y^2)$$

où L_x et L_y sont les composantes du moment cinétique $\vec{L}$ selon les deux directions *Ox* et *Oy* respectivement et ω une constante réelle positive.

1. a. Quelles sont les valeurs possibles du nombre quantique azimutal m ? Ecrire les vecteurs de la base $\{|l,m\rangle\}$ où **les vecteurs $|l,m\rangle$ sont à classer par <u>ordre décroissant</u> du nombre quantique m.**

b. Ecrire les matrices représentant L_+ et L_- dans la base $\{|l,m\rangle\}$.

c. En déduire les matrices représentant L_x et L_y dans la base $\{|l,m\rangle\}$.

d. En déduire la matrice représentant H dans la base $\{|l,m\rangle\}$.

2. a. Déterminer les énergies propres E_i $(i=1,2,3\,;E_1>E_2>E_3)$ du système.

b. Déterminer les états propres $|\phi_i\rangle$ associés aux énergies propres E_i.

3. A l'instant $t=0$, le système est dans l'état :

$$|\psi(0)\rangle=|1,1\rangle$$

Quel est le vecteur d'état $|\psi(t)\rangle$ à l'instant $t>0$?

4. a. Calculer les valeurs moyennes $\langle L_x\rangle_t$, $\langle L_y\rangle_t$ et $\langle L_z\rangle_t$ dans l'état $|\psi(t)\rangle$.

b. Donner l'expression du vecteur $\langle\vec{L}\rangle(t)$ à l'instant *t*. Quel est alors le mouvement effectué par le vecteur $\langle\vec{L}\rangle(t)$ sous l'effet du champ électrique ?

Problème II (8 points) : Addition de deux moments cinétiques

Considérons un moment cinétique orbital $\vec{L}$ et un moment cinétique de spin $\vec{S}$ de nombres quantiques respectifs $l=1$ et $s=\frac{3}{2}$. On désigne par $\mathscr{E}_l$ et $\mathscr{E}_s$ les espaces des états associés à chacun des moments cinétiques.

Les ensembles $\left\{ L^2, L_z \right\}$ et $\left\{ S^2, S_z \right\}$ forment des ECOC dans $\mathscr{E}_l$ et $\mathscr{E}_s$ respectivement, et l'on désignera par $\left\{ |\, l=1, m_l \rangle \otimes |\, s=3/2, m_s \rangle \right\}$, que l'on notera simplement $\left\{ |\, m_l\,, m_s \rangle \right\}$, la base découplée de l'espace des états $\mathscr{E} = \mathscr{E}_l \otimes \mathscr{E}_s$ formée par les vecteurs propres communs aux observables L^2, S^2, L_z et S_z.

Le moment cinétique total $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ est caractérisé par les nombres quantiques *J* et *M*. On désignera par $\left\{ |\, l, s, J, M \rangle \right\}$ que l'on notera simplement $\left\{ |\, J, M \rangle \right\}$ la base couplée formée par les vecteurs propres communs aux observables L^2, S^2, J^2 et J_z.

1. Préciser les espaces des états $\mathscr{E}_l = \left\{ |\, l, m_l \rangle \right\}$ et $\mathscr{E}_s = \left\{ |\, s, m_s \rangle \right\}$: quels sont leurs vecteurs de base et leurs dimensions ?

2. Quelle est la dimension de l'espace des états $\mathscr{E} = \mathscr{E}_l \otimes \mathscr{E}_s$? Donner les vecteurs de la base découplée $\left\{ |\, m_l\,, m_s \rangle \right\}$.

3. Quelles sont **les valeurs possibles** prises par les nombres quantiques *J* et *M* ? Donner les vecteurs de la base couplée $\left\{ |\, J, M \rangle \right\}$.

4. Dans le plan $(m_l\,, m_s)$, reporter les différentes valeurs de m_l et m_s, tracer les lignes $M =$ constante et déduire **le degré de dégénérescence des valeurs de** ***M***.

5. En utilisant **la table des coefficients de Clebsch – Gordan (**ci-jointe sur la **page 3)**, donner les expressions des vecteurs $|\, J, M \rangle$ en fonction des vecteurs $|\, m_l\,, m_s \rangle$.

Table des coefficients de Clebsch – Gordan de l'addition des moments cinétiques $l = 1$ et $s = \frac{3}{2}$

$1 \times \frac{3}{2}$		5/2
		5/2
1	3/2	1

		5/2	3/2
		3/2	3/2
0	3/2	2/5	3/5
1	1/2	3/5	−2/5

		5/2	3/2	1/2
		1/2	1/2	1/2
−1	3/2	1/10	2/5	1/2
0	1/2	3/5	1/15	−1/3
1	−1/2	3/10	−8/15	1/6

		5/2	3/2	1/2
		−1/2	−1/2	−1/2
−1	1/2	3/10	8/15	1/6
0	−1/2	3/5	−1/15	−1/3
1	−3/2	1/10	−2/5	1/2

		5/2	3/2
		−3/2	−3/2
0	−3/2	2/5	−3/5
−1	−1/2	3/5	2/5

		5/2
		−5/2
−1	−3/2	1

UNIVERSITÉ IBN ZOHR
FACULTÉ DES SCIENCES
AGADIR

Année universitaire 2019 - 2020
Session normale – 10 Janvier 2020
Pr. NASSIK

Examen de Mécanique Quantique 2 – SMP5

Corrigé

Problème I (12 points) : Un moment cinétique $l=1$ dans un champ électrique

L'hamiltonien du système en présence du champ électrique est :

$$H=\frac{\omega}{\hbar}(L_x^2-L_y^2)$$

1. a. Les valeurs possibles de *m* :

On a $l=1$, alors les valeurs possibles du nombre quantique azimutal m sont $+1$, 0 et -1. Les vecteurs de la base $\{|l,m\rangle\}$ sont :

0,5
$$\{|1,1\rangle,|1,0\rangle,|1,-1\rangle\}$$

b. Matrices représentant L_+ et L_- dans la base $\{|1,1\rangle,|1,0\rangle,|1,-1\rangle\}$:

$$L_+\,|l,m\rangle=\hbar\,\sqrt{l(l+1)-m(m+1)}\,|l,m+1\rangle \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} L_+\,|1,1\rangle=0 \\ L_+\,|1,0\rangle=\hbar\sqrt{2}\,|1,1\rangle \\ L_+\,|1,-1\rangle=\hbar\sqrt{2}\,|1,0\rangle \end{cases}$$

Donc, les seuls de matrice non nuls sont :

$$\langle 1,0|L_+\,|1,-1\rangle=\langle 1,1|L_z\,|1,0\rangle=\hbar\sqrt{2}$$

La matrice représentant L_+ dans la base $\{|1,1\rangle,|1,0\rangle,|1,-1\rangle\}$ est par conséquent :

0,5
$$L_+=\hbar\sqrt{2}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

De même, la matrice représentant L_- dans la base $\{|1,1\rangle,|1,0\rangle,|1,-1\rangle\}$ est donnée par :

0,5
$$L_-=\hbar\sqrt{2}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

c. Matrices représentant L_x et L_y dans la base $\{|1,1\rangle,|1,0\rangle,|1,-1\rangle\}$:

On a :

$$\left.\begin{aligned}L_+=L_x+i\,L_y\\ L_-=L_x-i\,L_y\end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad L_x=\frac{1}{2}(L_++L_-) \quad , \quad L_y=\frac{L_+-L_-}{2i}$$

Donc, les matrices représentant L_x et L_y sont :

0,5 $$L_x=\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\quad,\quad L_y=\frac{i\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$$ 0,5

d. La matrice représentant H dans la base $\{|1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle\}$:

$$L_x^2=\frac{\hbar^2}{2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\quad,\quad L_y^2=\frac{\hbar^2}{2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

Donc :

0,5 $$H=\hbar\omega\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

2. a. Les énergies propres E_i de H :

$$\begin{vmatrix}-\lambda&0&\hbar\omega\\0&-\lambda&0\\\hbar\omega&0&-\lambda\end{vmatrix}=0\;\Rightarrow\;-\lambda\begin{vmatrix}-\lambda&0\\0&-\lambda\end{vmatrix}-\hbar\omega\begin{vmatrix}0&\hbar\omega\\-\lambda&0\end{vmatrix}=-\lambda^3-\lambda(\hbar\omega)^2=0$$

Donc, le polynôme caractéristique est :

$$\lambda\,(\lambda-\hbar\omega)(\lambda+\hbar\omega)=0$$

D'où les énergies propres de H :

0,5 $$\boxed{E_1=\hbar\omega\quad;\quad E_2=0\quad;\quad E_3=-\hbar\omega}$$

b. Les états propres $|\phi_i\rangle$:

- **Le vecteur propre $|\phi_1\rangle$ associé à la valeur propre $E_1=\hbar\omega$:**

On cherche $|\phi_1\rangle=\alpha\,|1,1\rangle+\beta\,|1,0\rangle+\gamma\,|1,-1\rangle$ tel que :

$$H|\phi_1\rangle=\hbar\omega|\phi_1\rangle \qquad (1)$$

$$\langle\phi_1|\phi_1\rangle=|\alpha|^2+|\beta|^2+|\gamma|^2=1 \qquad (2)$$

(1) $$H|\phi_1\rangle=\hbar\omega|\phi_1\rangle\;\Rightarrow\;\hbar\omega\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}=\hbar\omega\begin{pmatrix}\gamma\\0\\\alpha\end{pmatrix}=\hbar\omega\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}\;\Rightarrow\;\alpha=\gamma\quad,\quad\beta=0$$

En remplaçons ces paramètres dans l'équation (2), on obtient :

(2) $\Rightarrow\; 2|\alpha|^2=1 \quad\Rightarrow\quad \alpha=\gamma=\frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$: en prenant le facteur de phase $e^{i\theta}=1$.

Par conséquent, le vecteur propre $|\phi_1\rangle$ est :

1 $$\boxed{|\phi_1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\,|1,1\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}\,|1,-1\rangle}$$

- **Le vecteur propre $|\phi_2\rangle$ associé à la valeur propre $E_2 = 0$:**

On cherche $|\phi_2\rangle = \alpha\,|1,1\rangle + \beta\,|1,0\rangle + \gamma\,|1,-1\rangle$ tel que :

$$H|\phi_2\rangle = 0|\phi_1\rangle \qquad (1)$$

$$\langle\phi_2|\phi_2\rangle = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1 \qquad (2)$$

$$(1) \quad H|\phi_2\rangle = 0|\phi_1\rangle \;\Rightarrow\; \hbar\omega\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \hbar\omega\begin{pmatrix}\gamma\\0\\ \alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \alpha = \gamma = 0 \;,\; \beta \neq 0$$

En remplaçons ces paramètres dans l'équation (2), on obtient :

(2) $\Rightarrow\; |\beta|^2 = 1 \;\Rightarrow\; \beta = e^{i\theta} = 1$, où on a pris le facteur de phase égal à 1.

Par conséquent, le vecteur propre $|\phi_2\rangle$ est :

1

$$\boxed{|\phi_2\rangle = |1,0\rangle}$$

- **Le vecteur propre $|\phi_3\rangle$ associé à la valeur propre $E_3 = -\hbar\omega$:**

On cherche $|\phi_3\rangle = \alpha\,|1,1\rangle + \beta\,|1,0\rangle + \gamma\,|1,-1\rangle$ tel que :

$$H|\phi_3\rangle = -\hbar\omega|\phi_3\rangle \qquad (1)$$

$$\langle\phi_3|\phi_3\rangle = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1 \qquad (2)$$

$$(1) \quad H|\phi_3\rangle = -\hbar\omega|\phi_3\rangle \;\Rightarrow\; \hbar\omega\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \hbar\omega\begin{pmatrix}\gamma\\0\\ \alpha\end{pmatrix} = -\hbar\omega\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \alpha = -\gamma \;,\; \beta = 0$$

En remplaçons ces paramètres dans l'équation (2), on obtient :

(2) $\Rightarrow\; 2|\alpha|^2 = 1 \;\Rightarrow\; \alpha = -\gamma = \dfrac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$: en prenant le facteur de phase $e^{i\theta} = 1$.

Par conséquent, le vecteur propre $|\phi_3\rangle$ est :

1

$$\boxed{|\phi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1,1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1,-1\rangle}$$

Tableau récapitulatif :

E_i	$\lvert\phi_i\rangle$
$E_1 = \hbar\omega$	$\lvert\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\lvert 1,1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\lvert 1,-1\rangle$
$E_2 = 0$	$\lvert\phi_2\rangle = \lvert 1,0\rangle$
$E_3 = -\hbar\omega$	$\lvert\phi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\lvert 1,1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\lvert 1,-1\rangle$

3. A l'instant $t = 0$, le système est dans l'état :

$$|\psi(0)\rangle = |1\,,1\rangle$$

Le vecteur d'état $|\psi(t)\rangle$ à l'instant $t > 0$:

D'après le postulat de l'évolution, le vecteur d'état $|\psi(t)\rangle$ est donné par :

$$|\psi(t)\rangle = U(t,0)|\psi(0)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H.t}\,|1,1\rangle$$

Comme le vecteur $|1,1\rangle$ n'est pas un état propre de *H*, il faut commencer par exprimer $|\psi(0)\rangle$ dans la base des vecteurs propres de *H*.

On constate que :

$$|\phi_1\rangle + |\phi_3\rangle = \sqrt{2}\,|1,1\rangle \quad \Rightarrow \quad |\psi(0)\rangle = |1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_3\rangle$$

Par conséquent :

$$\boxed{|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\omega t}|\phi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\omega t}|\phi_3\rangle}$$

Dans la base $\{|1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle\}$:

$$\begin{aligned}|\psi(t)\rangle &= \frac{1}{2}e^{-i\omega t}\left[|1,1\rangle + |1,-1\rangle\right] + \frac{1}{2}e^{i\omega t}\left[|1,1\rangle - |1,-1\rangle\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right]|1,1\rangle - \frac{1}{2}\left[e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right]|1,-1\rangle = \cos(\omega t)\,|1,1\rangle - i\sin(\omega t)\,|1,-1\rangle\end{aligned}$$

Donc :

1,5

$$\boxed{|\psi(t)\rangle = \cos(\omega t)\,|1,1\rangle - i\sin(\omega t)\,|1,-1\rangle}$$

4. a. Calcul des valeurs moyennes $\langle L_x \rangle_t$, $\langle L_y \rangle_t$ et $\langle L_z \rangle_t$ à l'instant *t* :

- **Valeur moyenne $\langle L_x \rangle_t$:**

On a : $\langle L_x \rangle_t = \langle\psi(t)|L_x|\psi(t)\rangle$, donc :

$$\begin{aligned}\langle L_x \rangle_t &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\cos(\omega t) & 0 & i\sin(\omega t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\omega t)\\ 0\\ -i\sin(\omega t)\end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}\cos(\omega t) & 0 & i\sin(\omega t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \cos(\omega t) - i\sin(\omega t)\\ 0\end{pmatrix} = 0\end{aligned}$$

Donc :

1

$$\boxed{\langle L_x \rangle_t = 0}$$

- **Valeur moyenne $\langle L_y \rangle_t$:**

On a : $\langle L_y \rangle_t = \langle\psi(t)|L_y|\psi(t)\rangle$, donc :

Donc :

$$\left\langle L_y \right\rangle_t = \frac{i\hbar}{\sqrt{2}}\left(\cos(\omega t) \quad 0 \quad i\sin(\omega t)\right)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ 0 \\ -i\sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar\sqrt{2}}{2}\left(\cos(\omega t) \quad 0 \quad i\sin(\omega t)\right)\begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\omega t) + i\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Donc :

1

$$\boxed{\left\langle L_y \right\rangle_t = 0}$$

- **Valeur moyenne $\left\langle L_z \right\rangle_t$:**

On a : $\left\langle L_z \right\rangle_t = \langle \psi(t) | L_z | \psi(t) \rangle$, donc :

$$\left\langle L_z \right\rangle_t = \hbar\left(\cos(\omega t) \quad 0 \quad i\sin(\omega t)\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ 0 \\ -i\sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$= \hbar\left(\cos(\omega t) \quad 0 \quad i\sin(\omega t)\right)\begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ 0 \\ i\sin(\omega t) \end{pmatrix} = \hbar\left[\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t)\right]$$

Donc :

1

$$\boxed{\left\langle L_z \right\rangle_t = \hbar\cos(2\omega t)}$$

b. Expression du vecteur $\left\langle \vec{L} \right\rangle(t)$:

$$\left\langle \vec{L} \right\rangle(t) = \left\langle L_x \right\rangle_t .\vec{e}_x + \left\langle L_y \right\rangle_t .\vec{e}_y + \left\langle L_z \right\rangle_t .\vec{e}_z$$

Donc :

0,5 $\boxed{\left\langle \vec{L} \right\rangle(t) = \hbar\cos(2\omega t).\vec{e}_z}$ avec $\boxed{\left|\left\langle \vec{L} \right\rangle\right| = \hbar\cos(2\omega t)}$

- **Mouvement effectué par $\left\langle \vec{L} \right\rangle(t)$:**

0,5

Sous l'effet du champ électrique, le vecteur moment cinétique en moyenne, $\left\langle \vec{L} \right\rangle_t$, varie en module mais garde une direction fixe (celle de l'axe *Oz*) : le vecteur $\left\langle \vec{L} \right\rangle_t$ oscille en permanence le long de l'axe (*Oz*) à la fréquence $\frac{\omega}{\pi}$.

Problème II (8 points) :

1. Espaces des états :

- $l=1 \Rightarrow m=1, 0, -1$, donc :

$$\mathscr{E}_l = \{ |1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle \} \text{ et } \dim(\mathscr{E}_l) = 3.$$

0,5

- $s=\frac{3}{2} \Rightarrow m=\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$, donc :

$$\mathscr{E}_s = \left\{ \left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle \right\} \text{ et } \dim(\mathscr{E}_s) = 4.$$

2. L'espace des états $\mathscr{E} = \mathscr{E}_l \otimes \mathscr{E}_s$ est donc de dimension 12, et est rapporté à la base découplée :

1

$$\{ | m_l, m_s \rangle \} = \left\{ \left|1, \pm\frac{3}{2}\right\rangle, \left|1, \pm\frac{1}{2}\right\rangle, \left|0, \pm\frac{3}{2}\right\rangle, \left|0, \pm\frac{1}{2}\right\rangle, \left|-1, \pm\frac{3}{2}\right\rangle, \left|-1, \pm\frac{1}{2}\right\rangle \right\}$$

3. Le moment cinétique total $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ est caractérisé par les nombres quantiques J et M.

Les valeurs possibles prises par les nombres J et M :

Les deux règles de sélection établies par la théorie d'addition des moments cinétiques sont :

0,5 • $|l-s| \le J \le l+s \quad \Rightarrow \quad \left|1-\frac{3}{2}\right| \le J \le 1+\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad J = \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$

0,5 • $-J \le M \le J \quad \Rightarrow \quad -\frac{5}{2} \le M \le \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad M = \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}$

Ce qui implique les différentes valeurs prises par J et M :

J	M	$\|J, M\rangle$	Sous - espaces
$\frac{5}{2}$	$\pm\frac{5}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}$	$\left\|\frac{5}{2}, \pm\frac{5}{2}\right\rangle, \left\|\frac{5}{2}, \pm\frac{3}{2}\right\rangle, \left\|\frac{5}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle$	$\mathscr{E}\left(J=\frac{5}{2}\right)$
$\frac{3}{2}$	$\pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}$	$\left\|\frac{3}{2}, \pm\frac{3}{2}\right\rangle, \left\|\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle$	$\mathscr{E}\left(J=\frac{3}{2}\right)$
$\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\left\|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle$	$\mathscr{E}\left(J=\frac{1}{2}\right)$

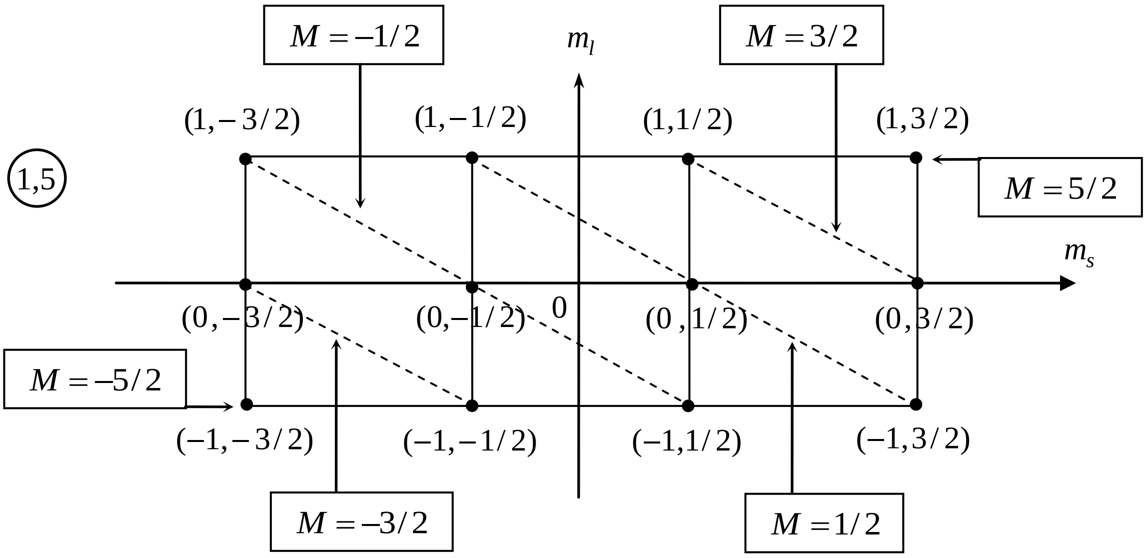
D'où la base de vecteurs propres communs à J^2 et J_z :

0,5

$$\{ | J, M \rangle \} = \left\{ \left|\frac{5}{2}, \pm\frac{5}{2}\right\rangle, \left|\frac{5}{2}, \pm\frac{3}{2}\right\rangle, \left|\frac{5}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2}, \pm\frac{3}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle \right\}$$

4. Degré de dégénérescence des différentes valeurs de M :

1,5



0,5

M	Dégénérescence
$M = \pm\frac{5}{2}$	1
$M = \pm\frac{3}{2}$	2
$M = \pm\frac{1}{2}$	3

5. Expressions des vecteurs $\left| J\,, M \right\rangle$ en fonction des vecteurs $\left| m_l\,, m_s \right\rangle$:

N. B. : 0,25 points par vecteur

a. Le sous-espace $\mathscr{E}\left(J = \frac{5}{2} \right)$:

$$\left|\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right\rangle = \left|1, \frac{3}{2}\right\rangle \qquad ; \qquad \left|\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right\rangle = \left|-1, -\frac{3}{2}\right\rangle$$

1,5

$$\left|\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{5}}\left|0, \frac{3}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{3}{5}}\left|1, \frac{1}{2}\right\rangle$$

$$\left|\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{1}{10}}\left|-1, \frac{3}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{3}{5}}\left|0, \frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{3}{10}}\left|1, -\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$\left|\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{3}{10}}\left|-1, \frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{3}{5}}\left|0, -\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{1}{10}}\left|1, -\frac{3}{2}\right\rangle$$

$$\left|\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{5}}\left|0, -\frac{3}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{3}{5}}\left|-1, -\frac{1}{2}\right\rangle$$

b. Le sous -espace $\mathscr{E}\left(J=\frac{3}{2}\right)$:

1

$$\left|\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{3}{5}}\left|0\,,\frac{3}{2}\right\rangle-\sqrt{\frac{2}{5}}\left|1,\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$\left|\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{2}{5}}\left|-1,\frac{3}{2}\right\rangle+\sqrt{\frac{1}{15}}\left|0\,,\frac{1}{2}\right\rangle-\sqrt{\frac{8}{15}}\left|1,-\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{8}{15}}\left|-1,\ \frac{1}{2}\right\rangle-\sqrt{\frac{1}{15}}\left|0\,,-\frac{1}{2}\right\rangle-\sqrt{\frac{2}{5}}\left|1,-\frac{3}{2}\right\rangle$$

$$\left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle=-\sqrt{\frac{3}{5}}\left|0\,,-\frac{3}{2}\right\rangle+\sqrt{\frac{2}{5}}\left|-1,-\frac{1}{2}\right\rangle$$

c. Le sous -espace $\mathscr{E}\left(J=\frac{1}{2}\right)$:

0,5

$$\left|\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right\rangle\ =\sqrt{\frac{1}{2}}\left|-1,\frac{3}{2}\right\rangle-\sqrt{\frac{1}{3}}\left|0\,,\frac{1}{2}\right\rangle+\sqrt{\frac{1}{6}}\left|1,-\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{1}{6}}\left|-1,\ \frac{1}{2}\right\rangle-\sqrt{\frac{1}{3}}\left|0\,,-\frac{1}{2}\right\rangle+\sqrt{\frac{1}{2}}\left|1,-\frac{3}{2}\right\rangle$$

UNIVERSITÉ IBN ZOHR
FACULTÉ DES SCIENCES
AGADIR

Année universitaire 2018 - 2019
Session normale – 17 Décembre 2018
Pr. NASSIK

Examen de Mécanique Quantique 2 – SMP5

Durée 2 h 00	**-**	**Aucun document n'est autorisé**

Questions de cours (8 points) : Factorisation des harmoniques sphériques

Les harmoniques sphériques $Y_l^m(\theta,\varphi) = \langle \theta,\varphi \mid l,m \rangle$ sont les fonctions propres communes aux observables L^2 et L_z ; l et m sont les nombres quantiques associés au moment cinétique orbital.

1. Montrer que $Y_l^m(\theta,\varphi)$ s'écrit sous la forme :

$$Y_l^m(\theta,\varphi) = F_{l,m}(\theta)G_m(\varphi)$$

Donner l'expression de la fonction $G_m(\varphi)$ et les valeurs prises par le nombre quantique m.

2. On considère le cas où $m = l$; montrer que :

$$F_{l,l}(\theta) = C_l\,(\sin\theta)^l$$

où C_l est une constante.

3. Indiquer, **sans détailler les calculs**, comment obtenir $Y_l^m(\theta,\varphi)$ à partir de $Y_l^l(\theta,\varphi)$.

4. Déterminer les expressions des harmoniques sphériques dans le cas où $l = 2$:

$$Y_2^2(\theta,\varphi) \quad , \quad Y_2^1(\theta,\varphi) \quad , \quad Y_2^0(\theta,\varphi) \quad , \quad Y_2^{-1}(\theta,\varphi) \quad , \quad Y_2^{-2}(\theta,\varphi)$$

Formulaire :

$$L_z = -i\hbar.\frac{\partial}{\partial\varphi} \quad ; \quad L_\pm = \pm\hbar e^{\pm i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \pm i\cot g\theta.\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \quad ; \quad C_l = \frac{(-1)^l}{2^l l!}\sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}}$$

Problème (12 points) : Un moment cinétique $l = 1$ dans un champ magnétique

On considère un système quantique de moment cinétique orbital $\vec{L}$ caractérisé par le nombre quantique $l = 1$. Le sous-espace à trois dimensions associé $\mathscr{E}_1$ est rapporté à la base $\{|l = 1, m\rangle\}$, où les vecteurs $|l,m\rangle$ sont classés par **ordre décroissant** du nombre quantique m.

L'hamiltonien H_0 du système est :

$$H_0 = a\left(L_z + \frac{2}{\hbar}L_z^2\right)$$

où a est une constante positive, ayant la dimension d'une pulsation.

1. Niveaux d'énergie de H_0 : Quels sont les énergies propres $E_m^{(0)}$ de H_0 ? Préciser leur degré de dégénérescence et les vecteurs propres $|1, m\rangle$ associés.

2. On applique un champ magnétique statique $\vec{B}$ parallèle à l'axe Ox $(\vec{B} = B.\vec{e}_x)$. L'interaction du champ $\vec{B}$ avec le moment magnétique du système $\vec{M}_L = \gamma_L \vec{L}$ (γ_L est le rapport gyromagnétique orbital, supposé négatif) est décrite par l'hamiltonien :

$$W = -\vec{B}.\vec{M}_L$$

On notera $\omega = -\gamma_L B$ la pulsation de Larmor et l'on suppose que $\omega << a$.

L'hamiltonien total du système est alors :

$$H = H_0 + W$$

a. Donner l'expression de l'hamiltonien d'interaction W en fonction des opérateurs L_+, L_- et des données du problème.

b. Ecrire la matrice représentant W dans la base $\{|l, m\rangle\}$.

3. Calculer, **au premier ordre** puis **au second ordre** de perturbation, les énergies propres, et **au premier ordre** de perturbation, les vecteurs propres pour les trois niveaux d'énergie de l'hamiltonien total H :

a. Niveau fondamental ;

b. 1er niveau excité ;

c. 2ème niveau excité.

UNIVERSITÉ IBN ZOHR
FACULTÉ DES SCIENCES
AGADIR

Année universitaire 2018 - 2019
Session normale – 17 Décembre 2018
Pr. NASSIK

Examen de Mécanique Quantique 2 – SMP5

Corrigé

Questions de cours (8 points) : Factorisation des harmoniques sphériques

1. Montrons que $Y_l^m(\theta,\varphi)$ s'écrit sous la forme : $Y_l^m(\theta,\varphi) = F_{l,m}(\theta)\,G_m(\varphi)$

- On a :

$$L_z\, Y_l^m(\theta,\varphi) = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}Y_l^m(\theta,\varphi) = m\hbar\, Y_l^m(\theta,\varphi) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial\varphi}Y_l^m(\theta,\varphi) = i\,m\, Y_l^m(\theta,\varphi)$$

Les solutions de cette équation sont de la forme :

1

$$\boxed{Y_l^m(\theta,\varphi) = F_{l,m}(\theta)\,e^{i\,m\varphi} \quad \Rightarrow \quad G_m(\varphi) = e^{i\,m\varphi}}$$

- Comme $0 \le \varphi \le 2\pi$ et la fonction d'onde doit être continue en tout point, on a alors :

$$Y_l^m(\theta,\varphi=0) = Y_l^m(\theta,\varphi=2\pi) \quad \Rightarrow \quad e^{2\pi\, i\, m} = 1$$

Ce qui implique que m ne peut prendre que des valeurs entières :

0,5

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$$

2. On considère le cas $m = l$, montrons que : $F_{l,l}(\theta) = C_l\,(\sin\theta)^l$

- On a :

$$L_+\left|\, l, l\,\right\rangle = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \left\langle \theta,\varphi\right| L_+ \left|\, l,l\,\right\rangle = 0 \qquad \Rightarrow \qquad L_+ Y_l^l(\theta,\varphi) = 0$$

Or :

$$L_+ = \hbar e^{i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot g\theta.\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

Donc :

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot g\theta.\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)F_{l,l}(\theta)e^{i\,l\,\varphi} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dF_{l,l}(\theta)}{d\theta}.e^{i\,l\,\varphi} - l.\cot g\theta.F_{l,l}(\theta)e^{i\,l\,\varphi} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dF_{l,l}(\theta)}{F_{l,l}(\theta)} = l.\cot g\theta.d\theta = l\,\frac{d(\sin\theta)}{\sin\theta} \quad \Rightarrow \quad Ln\,F_{l,l}(\theta) = l\,Ln(\sin\theta) = Ln(\sin\theta)^l$$

$$\Rightarrow \quad F_{l,l}(\theta) = c_l\,(\sin\theta)^l$$

D'où :

1

$$\boxed{Y_l^l(\theta,\varphi) = C_l\,(\sin\theta)^l\, e^{i\,l\,\varphi}}$$

où C_l est une constante.

3. Comment obtenir $Y_l^m(\theta,\varphi)$ à partir de $Y_l^l(\theta,\varphi)$?

$Y_l^m(\theta,\varphi)$ s'obtient par applications successives de l'opérateurs L_- sur $Y_l^l(\theta,\varphi)$. En effet :

0,5 $$L_- Y_l^l(\theta,\varphi)\,\alpha\, Y_l^{l-1}(\theta,\varphi) \quad\Rightarrow\quad L_-^p Y_l^l(\theta,\varphi)\,\alpha\, Y_l^{l-p}(\theta,\varphi) \quad ; \quad p=1,2,3,\cdots$$

Donc, pour obtenir $Y_l^m(\theta,\varphi)$, il faut que $l-p=m \quad\Rightarrow\quad p=l-m$.

Ainsi, $Y_l^m(\theta,\varphi)$ s'obtient en appliquant $(l-m)$ fois l'opérateur L_- sur $Y_l^l(\theta,\varphi)$.

4. Expressions des harmoniques sphériques pour $l=2$:

- $Y_2^2(\theta,\varphi)$:

On a :

$$Y_2^2(\theta,\varphi)=C_2\sin^2\theta.e^{2i\varphi}$$

Or :

$$C_2=\sqrt{\frac{15}{32\pi}}$$

Donc :

1 $$\boxed{Y_2^2(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta.e^{2i\varphi}}$$

- $Y_2^1(\theta,\varphi)$:

On a d'une part :

$$L_-\,|\,2,2\rangle=2\hbar\,|\,2,1\rangle \quad\Rightarrow\quad L_-\,Y_2^2(\theta,\varphi)=2\,\hbar\,Y_2^1(\theta,\varphi)$$

D'autre part :

$$L_-\,Y_2^2(\theta,\varphi)=-\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\,\hbar e^{-i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-i\cot g\theta.\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\sin^2\theta.e^{2i\varphi}$$

$$2\,\hbar\,Y_2^1(\theta,\varphi)=-\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\,\hbar e^{-i\varphi}\left(2\cos\theta.\sin\theta+2\cot g\theta.\sin^2\theta\right)e^{2i\varphi}=-4\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\,\hbar\cos\theta.\sin\theta.e^{i\varphi}$$

D'où:

1 $$\boxed{Y_2^1(\theta,\varphi)=-\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\cos\theta.\sin\theta.e^{i\varphi}}$$

- $Y_2^0(\theta,\varphi)$:

On a d'une part :

$$L_-\,|\,2,1\rangle=\hbar\sqrt{6}\,|\,2,0\rangle \quad\Rightarrow\quad L_-\,Y_2^1(\theta,\varphi)=\hbar\sqrt{6}\,Y_2^0(\theta,\varphi)$$

D'autre part :

$$L_-\ Y_2^1(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\ \hbar e^{-i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-i\cot g\theta.\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\cos\theta.\sin\theta.e^{i\varphi}$$

$$\hbar\ \sqrt{6}\ Y_2^1(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\ \hbar e^{-i\varphi}\left(-\sin^2\theta+\cos^2\theta+\cot g\theta.\cos\theta.\sin\theta\right)e^{i\varphi}$$

$$=\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\ \hbar\ \left(-\sin^2\theta+\cos^2\theta+\cos^2\theta\right)=\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\ \hbar\ \left(3\cos^2\theta-1\right)$$

D'où:

1 $$\boxed{Y_2^0(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\left(3\cos^2\theta-1\right)}$$

- $Y_2^{-1}(\theta,\varphi)$:

On a d'une part :

$$L_-\left|\,2,0\right\rangle=\hbar\ \sqrt{6}\left|\,2,-1\right\rangle\ \Rightarrow\ L_-\ Y_2^0(\theta,\varphi)=\hbar\ \sqrt{6}\ Y_2^{-1}(\theta,\varphi)$$

D'autre part :

$$L_-\ Y_2^0(\theta,\varphi)=-\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\ \hbar e^{-i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-i\cot g\theta.\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(3\cos^2\theta-1\right)$$

$$\hbar\ \sqrt{6}\ Y_2^{-1}(\theta,\varphi)=-\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\ \hbar e^{-i\varphi}\left(-6\cos\theta.\sin\theta\right)$$

D'où:

1 $$\boxed{Y_2^{-1}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\cos\theta.\sin\theta.e^{-i\varphi}}$$

- $Y_2^{-2}(\theta,\varphi)$:

On a d'une part :

$$L_-\left|\,2,-1\right\rangle=2\hbar\left|\,2,-2\right\rangle\ \Rightarrow\ L_-\ Y_2^{-1}(\theta,\varphi)=2\hbar\ Y_2^{-2}(\theta,\varphi)$$

D'autre part :

$$L_-\ Y_2^{-1}(\theta,\varphi)=-\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\ \hbar e^{-i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-i\cot g\theta.\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\cos\theta.\sin\theta.e^{-i\varphi}$$

$$2\hbar\ Y_2^{-2}(\theta,\varphi)=-\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\ \hbar e^{-i\varphi}\left(-\sin^2\theta+\cos^2\theta-\cot g\theta.\cos\theta.\sin\theta\right)e^{-i\varphi}$$

D'où:

1 $$\boxed{Y_2^{-2}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta.e^{-2i\varphi}}$$

Problème (12 points) : Un moment cinétique $l=1$ dans un champ magnétique

On a $l=1$, alors les valeurs possibles du nombre quantique azimutal m sont $+1$, 0 et -1. Les vecteurs de la base $\{|l,m\rangle\}$ sont :

$$\{|1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle\}$$

1. Niveaux d'énergie de H_0 :

$$H_0\,|1,m\rangle = \left(a\,L_z + \frac{2a}{\hbar}L_z^2\right)|1,m\rangle = a\,m(1+2m)\hbar\,|1,m\rangle$$

Donc :

0,5

$$\begin{aligned} H_0\,|1,1\rangle &= 3a\hbar\,|1,1\rangle \\ H_0\,|1,0\rangle &= 0 \\ H_0\,|1,-1\rangle &= a\hbar\,|1,-1\rangle \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad H_0 = a\hbar\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les niveaux d'énergie de H_0 (hamiltonien non perturbé) sont donc non dégénérés :

0,5

Niveau d'énergie de H_0	Energie propre $E_m^{(0)}$	Ket propre $\lvert 1,m\rangle$
Niveau fondamental	$E_0^{(0)}=0$	$\lvert 1,0\rangle$
1er niveau excité	$E_{-1}^{(0)}=a\hbar$	$\lvert 1,-1\rangle$
2ème niveau excité	$E_{+1}^{(0)}=3a\hbar$	$\lvert 1,1\rangle$

2. a. Hamiltonien d'interaction du champ $\vec{B}$ avec le moment magnétique du système :

$$W = -\vec{B}.\vec{M}_L = -B\gamma_L\,\vec{L}.\vec{e}_x = \omega L_x$$

Or :

$$\begin{cases} L_+ = L_x + i\,L_y \\ L_- = L_x - i\,L_y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)$$

Donc :

1

$$\boxed{W = \omega L_x = \frac{\omega}{2}(L_+ + L_-)}$$

b. Matrice de W dans la base $\{|1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle\}$:

$$W\,|1,+1\rangle = \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}}\,|1,0\rangle \quad ; \quad W\,|1,0\rangle = \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}}\left[|1,+1\rangle + |1,-1\rangle\right] \quad ; \quad W\,|1,-1\rangle = \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}}\,|1,0\rangle$$

Donc, les seuls éléments de matrice non nuls sont :

$$\langle 1,0|\,W\,|1,+1\rangle = \langle 1,+1|\,W\,|1,0\rangle = \langle 1,-1|\,W\,|1,0\rangle = \langle 1,0|\,W\,|1,-1\rangle = \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}}$$

D'où la matrice de W dans la base $\{|1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle\}$:

1,5 $$W=\frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

3. Correction aux énergies propres et aux vecteurs propres de H :

a. Niveau fondamental :

i. Correction au 1^er ordre de perturbation à l'énergie :

0,5 $$\boxed{E_0^{(1)}=\langle 1,0\,|W|\,1,0\,\rangle=0}$$

ii. Correction au 2^ème ordre de perturbation à l'énergie :

0,5 $$E_0^{(2)}=\sum_{m\neq 0}\frac{\left|\langle 1,m|W|1,0\rangle\right|^2}{E_0^{(0)}-E_m^{(0)}}=\frac{\left|\langle 1,+1|W|1,0\rangle\right|^2}{E_0^{(0)}-E_{+1}^{(0)}}+\frac{\left|\langle 1,-1|W|1,0\rangle\right|^2}{E_0^{(0)}-E_{-1}^{(0)}}$$

Or :

$$\langle 1,+1|W|1,0\rangle=\langle 1,-1|W|1,0\rangle=\frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}}\quad,\quad E_0^{(0)}=0\quad,\quad E_{-1}^{(0)}=a\hbar\quad\text{et}\quad E_{+1}^{(0)}=3a\hbar$$

0,5 $$\Rightarrow\quad E_0^{(2)}=\frac{\hbar^2\omega^2}{2}\left(-\frac{1}{3a\hbar}-\frac{1}{a\hbar}\right)=-\frac{2\hbar\omega^2}{3a}$$

Ainsi, au second ordre de perturbation, l'énergie du niveau fondamental est :

$$\boxed{E_0=-\frac{2\hbar\omega^2}{3a}}$$

iii. Correction au 1^er ordre de perturbation au vecteur propre :

0,5 $$|\psi_0\rangle=|1,0\rangle+\sum_{m\neq 0}\frac{\langle 1,m|W|1,0\rangle}{E_0^{(0)}-E_m^{(0)}}|1,m\rangle=|1,0\rangle+\frac{\langle 1,1|W|1,0\rangle}{E_0^{(0)}-E_{+1}^{(0)}}|1,1\rangle+\frac{\langle 1,-1|W|1,0\rangle}{E_0^{(0)}-E_{-1}^{(0)}}|1,-1\rangle$$

1 $$\Rightarrow\quad\boxed{|\psi_0\rangle=|1,0\rangle-\frac{\omega}{a\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3}|1,1\rangle+|1,-1\rangle\right)}$$

b. 1^er niveau excité :

i. Correction au 1^er ordre de perturbation à l'énergie :

0,5 $$\boxed{E_{-1}^{(1)}=\langle 1,-1\,|W|\,1,-1\rangle=0}$$

ii. Correction au 2^ème ordre de perturbation à l'énergie :

0,5 $$E_{-1}^{(2)}=\sum_{m\neq -1}\frac{\left|\langle 1,m|W|1,-1\rangle\right|^2}{E_{-1}^{(0)}-E_m^{(0)}}=\frac{\left|\langle 1,0|W|1,-1\rangle\right|^2}{E_{-1}^{(0)}-E_0^{(0)}}+\frac{\left|\langle 1,1|W|1,-1\rangle\right|^2}{E_{-1}^{(0)}-E_{+1}^{(0)}}$$

Or :

$$\langle 1,0|W|1,-1\rangle=\frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}}\quad,\quad\langle 1,1|W|1,-1\rangle=0\quad,\quad E_0^{(0)}=0\quad,\quad E_{-1}^{(0)}=a\hbar\quad\text{et}\quad E_{+1}^{(0)}=3a\hbar$$

0,5 $$\Rightarrow \quad E_{-1}^{(2)} = \frac{\hbar^2\omega^2}{2}\left(\frac{1}{a\hbar}+0\right) = \frac{\hbar\omega^2}{2a}$$

Ainsi, au second ordre de perturbation, l'énergie du 1er niveau excité est :

$$\boxed{E_{-1} = a\hbar + \frac{\hbar\omega^2}{2a}}$$

iii. Correction au 1er ordre de perturbation au vecteur propre :

0,5 $$\left|\psi_{-1}\right\rangle = \left|1,-1\right\rangle + \sum_{m\neq -1}\frac{\left\langle 1,m\right|W\left|1,-1\right\rangle}{E_{-1}^{(0)}-E_m^{(0)}}\left|1,m\right\rangle$$
$$= \left|1,-1\right\rangle + \frac{\left\langle 1,0\right|W\left|1,-1\right\rangle}{E_{-1}^{(0)}-E_0^{(0)}}\left|1,0\right\rangle + \frac{\left\langle 1,1\right|W\left|1,-1\right\rangle}{E_{-1}^{(0)}-E_{+1}^{(0)}}\left|1,+1\right\rangle$$

1 $$\Rightarrow \quad \boxed{\left|\psi_{-1}\right\rangle = \left|1,-1\right\rangle + \frac{\omega}{a\sqrt{2}}\left|1,0\right\rangle}$$

c. 2ème niveau excité :

i. Correction au 1er ordre de perturbation à l'énergie :

0,5 $$\boxed{E_1^{(1)} = \left\langle 1,1\right|W\left|1,1\right\rangle = 0}$$

ii. Correction au 2ème ordre de perturbation à l'énergie :

0,5 $$E_{+1}^{(2)} = \sum_{m\neq 1}\frac{\left|\left\langle 1,m\right|W\left|1,1\right\rangle\right|^2}{E_{+1}^{(0)}-E_m^{(0)}} = \frac{\left|\left\langle 1,0\right|W\left|1,1\right\rangle\right|^2}{E_{+1}^{(0)}-E_0^{(0)}} + \frac{\left|\left\langle 1,-1\right|W\left|1,1\right\rangle\right|^2}{E_{+1}^{(0)}-E_{-1}^{(0)}}$$

Or :

$$\left\langle 1,0\right|W\left|1,1\right\rangle = \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}} \quad , \quad \left\langle 1,-1\right|W\left|1,1\right\rangle = 0 \quad , \quad E_0^{(0)} = 0 \quad , \quad E_{-1}^{(0)} = a\hbar \quad \text{et} \quad E_{+1}^{(0)} = 3a\hbar$$

0,5 $$\Rightarrow \quad E_{+1}^{(2)} = \frac{\hbar^2\omega^2}{2}\left(\frac{1}{3a\hbar}+0\right) = \frac{\hbar\omega^2}{6a}$$

Ainsi, au second ordre de perturbation, l'énergie du 2ème niveau excité est :

$$\boxed{E_{+1} = 3a\hbar + \frac{\hbar\omega^2}{6a}}$$

iii. Correction, au premier ordre de perturbation, au vecteur propre :

$$\left|\psi_{+1}\right\rangle = \left|1,1\right\rangle + \sum_{m\neq +1}\frac{\left\langle 1,m\right|W\left|1,1\right\rangle}{E_{+1}^{(0)}-E_m^{(0)}}\left|1,m\right\rangle = \left|1,1\right\rangle + \frac{\left\langle 1,0\right|W\left|1,1\right\rangle}{E_{+1}^{(0)}-E_0^{(0)}}\left|1,0\right\rangle + \frac{\left\langle 1,-1\right|W\left|1,1\right\rangle}{E_{+1}^{(0)}-E_{-1}^{(0)}}\left|1,-1\right\rangle$$

1 $$\Rightarrow \quad \boxed{\left|\psi_{+1}\right\rangle = \left|1,1\right\rangle + \frac{\omega}{3a\sqrt{2}}\left|1,0\right\rangle}$$

UNIVERSITÉ IBN ZOHR
FACULTÉ DES SCIENCES
AGADIR

Année universitaire 2018 - 2019
Session de rattrapage – 15 Janvier 2019
Pr. NASSIK

Examen de Mécanique Quantique 2 – SMP5

Durée 2 h 00 - Aucun document n'est autorisé

Exercice (5 points) : Moment cinétique orbital et harmoniques sphériques

Soit S un système physique dont l'espace des états $\mathscr{E}$ est rapporté à la base des vecteurs propres $|l,m\rangle$ communs à L^2 et L_z.

1. L'hamiltonien du système est donné par :

$$H = \sum_k a_k\, L_k^2$$

avec $k = x\,,\, y\,,\, z$ et les coefficients a_k sont des constantes réelles telles que $\sum_k a_k = 0$.

Montrer que l'hamiltonien H peut s'écrire sous la forme suivante :

$$H = A(L^2 - 3L_z^2) + B(L_+^2 + L_-^2)$$

où A et B sont deux constantes que l'on déterminera en fonction des coefficients a_k.

2. Dans la représentation $\{|\,\theta,\varphi\,\rangle\}$, l'état du système est décrit par la fonction d'onde :

$$\psi(\theta,\varphi) = C.\left(\frac{3}{2}\sin 2\theta . e^{i\varphi} - 2\sin^2\theta . e^{2i\varphi}\right), \text{ où } C \in \mathbb{R}^+$$

a. Ecrire $\psi(\theta,\varphi)$ en fonction des harmoniques sphériques $Y_l^m(\theta,\varphi)$.

b. Donner l'expression du ket $|\,\psi\rangle$ correspondant à $\psi(\theta,\varphi)$ en fonction des kets $|l,m\rangle$.

c. Déterminer la constante de normalisation C et écrire la nouvelle expression du ket $|\,\psi\rangle$.

d. On considère le cas particulier où $a_x = a_y = \dfrac{\omega}{\hbar}$.

i. les kets $|l,m\rangle$ sont-ils des vecteurs propres de H ?

ii. l'état $|\,\psi\rangle$ est-il un état propre de H ?

e. Le système étant dans l'état $|\,\psi\rangle$, on mesure l'observable L_z. Quelle est la probabilité de trouver la valeur $2\hbar$ comme résultat ?

☞ **Formulaire :**

$$L_+L_- + L_-L_+ = 2(L^2 - L_z^2)$$

$$Y_2^0(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\,(3\cos^2\theta - 1) \;,\; Y_2^{\pm 1}(\theta,\varphi) = \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\,\cos\theta.\sin\theta\; e^{\pm i\varphi} \;,\; Y_2^{\pm 2}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\,\sin^2\theta\, e^{\pm 2i\varphi}$$

Problème (15 points) : Addition de deux moments cinétiques

On considère une particule caractérisée par un moment cinétique orbital $\vec{L}$ et un moment cinétique de spin $\vec{S}$ de nombres quantiques respectifs $l=2$ et $s=\frac{1}{2}$. On désigne par $\mathscr{E}_l$ et $\mathscr{E}_s$ les espaces des états associés à chacun des moments cinétiques.

Les ensembles $\{L^2, L_z\}$ et $\{S^2, S_z\}$ forment des ECOC respectivement dans $\mathscr{E}_l$ et $\mathscr{E}_s$, et l'on désignera par $\{|\,l,\,m_l\,\rangle\otimes|\,s,\,m_s\rangle\}$, que l'on notera simplement $\{|\,m_l\,,\,m_s\rangle\}$, la base découplée de l'espace des états $\mathscr{E}=\mathscr{E}_l\otimes\mathscr{E}_s$ formée par les vecteurs propres communs aux observables L^2, S^2, L_z et S_z.

Le moment cinétique total de la particule $\vec{J}=\vec{L}+\vec{S}$ est caractérisé par les nombres quantiques J et M. On désignera par $\{|\,l,\,s,\,J\,,M\,\rangle\}$, que l'on notera simplement $\{|\,J\,,\,M\rangle\}$, la base couplée formée par les vecteurs propres communs aux observables L^2, S^2, J^2 et J_z.

1. Préciser les espaces des états $\mathscr{E}_l=\{|\,l,\,m_l\,\rangle\}$ et $\mathscr{E}_s=\{|\,s,\,m_s\rangle\}$ associés à chaque moment cinétique : **quels sont leurs vecteurs de base et leurs dimensions** ?

2. Donner les vecteurs de **la base découplée** $\{|\,m_l\,,\,m_s\rangle\}$ de l'espace des états $\mathscr{E}=\mathscr{E}_l\otimes\mathscr{E}_s$.

3. Quelles sont **les valeurs possibles** prises par les nombres quantiques J et M ? Donner les vecteurs de **la base couplée** $\{|\,J\,,\,M\rangle\}$.

4. Dans le plan $(m_l\,,\,m_s)$, reporter les différentes valeurs de m_l et m_s, tracer les lignes correspondants à $M=constante$ et déduire **le degré de dégénérescence des valeurs de** M.

5. En appliquant **la théorie de l'addition des moments cinétiques**, donner les expressions des vecteurs $|\,J\,,\,M\rangle$ en fonction des vecteurs $|\,m_l\,,\,m_s\rangle$.

__Méthode à suivre :__

a. Sous-espace $\mathscr{E}\,(J_{\max})$: Commencer par calculer les kets $|\,J_{\max}\,,\,M_{\max}\rangle$ et $|\,J_{\max}\,,\,M_{\min}\rangle$ ensuite faire agir successivement les opérateurs d'échelle J_- ou J_+ pour obtenir les autres kets de ce sous-espace.

b. Sous-espace $\mathscr{E}\,(J_{\max}-1)$: Utiliser la relation d'orthogonalité $\langle J',M|J\,,M\rangle=\delta_{JJ'}$ et exprimer le ket $|\,J_{\max}-1,\;M=J_{\max}-1\rangle$; ensuite faire agir successivement l'opérateur J_- pour obtenir les autres kets.

Examen de Mécanique Quantique 2 – SMP5

Corrigé

Exercice (5 points) : Moment cinétique orbital et harmoniques sphériques

1. L'hamiltonien décrivant le système est :

$$H = a_x L_x^2 + a_y L_y^2 + a_z L_z^2 \qquad \text{avec} \qquad a_x + a_y + a_z = 0$$

On a :

$$L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-) \quad , \quad L_y = \frac{1}{2i}(L_+ - L_-)$$

Donc :

$$\begin{aligned} H &= \frac{a_x}{4}(L_+ + L_-)^2 - \frac{a_y}{4}(L_+ - L_-)^2 + a_z L_z^2 \\ &= \frac{a_x}{4}(L_+^2 + L_-^2 + L_+L_- + L_-L_+) - \frac{a_y}{4}(L_+^2 + L_-^2 - L_+L_- - L_-L_+) + a_z L_z^2 \\ &= \frac{(a_x - a_y)}{4}(L_+^2 + L_-^2) + \frac{(a_x + a_y)}{4}(L_+L_- + L_-L_+) + a_z L_z^2 \end{aligned}$$

Or :

$$L_+L_- + L_-L_+ = 2(L^2 - L_z^2) \qquad \text{et} \qquad a_z = -a_x - a_y$$

Alors :

$$H = \frac{(a_x - a_y)}{4}(L_+^2 + L_-^2) + \frac{(a_x + a_y)}{2}(L^2 - L_z^2) - (a_x + a_y)L_z^2$$

D'où :

1

$$\boxed{H = \frac{(a_x + a_y)}{2}(L^2 - 3L_z^2) + \frac{(a_x - a_y)}{4}(L_+^2 + L_-^2)}$$

Ainsi :

$$\boxed{A = \frac{a_x + a_y}{2}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{B = \frac{a_x - a_y}{4}}$$

2. a. Expression de $\psi(\theta,\varphi)$ en fonction des harmoniques sphériques $Y_l^m(\theta,\varphi)$:

$$\psi(\theta,\varphi) = C.\left(\frac{3}{2}\sin 2\theta.e^{i\varphi} - 2\sin^2\theta.e^{2i\varphi}\right) = C.\left(3\sin\theta.\cos\theta.e^{i\varphi} - 2\sin^2\theta.e^{2i\varphi}\right)$$

On a :

$$\cos\theta.\sin\theta\, e^{i\varphi} = -\sqrt{\frac{8\pi}{15}}\; Y_2^1(\theta,\varphi) \qquad \text{et} \qquad \sin^2\theta\, e^{2i\varphi} = \sqrt{\frac{32\pi}{15}}\; Y_2^2(\theta,\varphi)$$

Donc :

$$\psi(\theta,\varphi) = -C\left[3\sqrt{\frac{8\pi}{15}}\; Y_2^1(\theta,\varphi) + 2\sqrt{\frac{32\pi}{15}}\; Y_2^2(\theta,\varphi)\right]$$

Ou encore :

1 $$\boxed{\psi(\theta,\varphi) = -C\sqrt{\frac{8\pi}{15}}\,\left[3\,Y_2^1(\theta,\varphi) + 4\,Y_2^2(\theta,\varphi)\right]}$$

b. Expression du ket $|\psi\rangle$ en fonction des kets propres $|l,m\rangle$:

Sachant que :

$$\psi(\theta,\varphi) = \langle\theta,\varphi|\psi\rangle \quad \text{et} \quad Y_l^m(\theta,\varphi) = \langle\theta,\varphi|l,m\rangle$$

Alors :

$$\psi(\theta,\varphi) = \langle\theta,\varphi|\psi\rangle = -C\sqrt{\frac{8\pi}{15}}\,\left[3\langle\theta,\varphi|2,1\rangle + 4\langle\theta,\varphi|2,2\rangle\right]$$

D'où l'expression du ket $|\psi\rangle$:

1 $$\boxed{|\psi\rangle = -C\sqrt{\frac{8\pi}{15}}\,\left[3|2,1\rangle + 4|2,2\rangle\right]}$$

c. Normalisation du ket $|\psi\rangle$:

$$\langle\psi|\psi\rangle = \frac{8\pi}{15}|C|^2\,[9+16\,] = \frac{40\pi}{3}|C|^2 = 1 \quad\Rightarrow\quad |C| = \sqrt{\frac{3}{40\pi}}$$

Comme $C \in \mathbb{R}^+$, alors :

0,5 $$\boxed{C = \sqrt{\frac{3}{40\pi}}} \quad\Rightarrow\quad \boxed{|\psi\rangle = -\frac{3}{5}|2,1\rangle - \frac{4}{5}|2,2\rangle}$$

d. Dans le cas particulier où $a_x = a_y = \dfrac{\omega}{\hbar}$, l'expression de H devient :

$$\boxed{H = \frac{\omega}{\hbar}\left(L^2 - 3L_z^2\right)}$$

i. Les kets $|l,m\rangle$ sont des vecteurs propres communs à L^2 et L_z, par conséquent ils sont aussi des états propres de H. En effet :

0,5 $$H|l,m\rangle = \frac{\omega}{\hbar}\left(L^2 - 3L_z^2\right)|l,m\rangle = \hbar\omega\left(l(l+1) - 3m^2\right)|l,m\rangle$$

ii. Par contre, l'état $|\psi\rangle$ n'est pas un état propre de l'hamiltonien H car :

0,5 $$H|\psi\rangle = 3\hbar\omega\left(-\frac{3}{5}|2,1\rangle + \frac{8}{5}|2,2\rangle\right) \neq \alpha\,|\psi\rangle$$

e. Probabilité de trouver la valeur $2\hbar$ comme résultat lorsqu'on mesure l'observable L_z :

$2\hbar$ est une valeur propre de L_z associée au ket $|2,2\rangle$, donc :

0,5 $$\wp(2\hbar) = \left|\langle 2,2|\psi\rangle\right|^2 = \left|-\frac{4}{5}\right|^2 = \frac{16}{25}$$

Problème (15 points) :

1. Espaces des états :

- Espace des états $\mathscr{E}_l$:

- $l = 2 \quad \Rightarrow \quad m = \pm 2, \pm 1, 0$, donc :

0,5

$$\mathscr{E}_l = \left\{ |\,2, 2\rangle, |\,2, 1\rangle, |\,2, 0\rangle, |\,2, -1\rangle, |\,2, -2\rangle \right\} \text{ et } \dim(\mathscr{E}_l) = 5.$$

- Espace des états $\mathscr{E}_s$:

- $s = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$, donc :

0,5

$$\mathscr{E}_s = \left\{ \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle \right\} \text{ et } \dim(\mathscr{E}_s) = 2.$$

2. La base découplée $\{ |\, m_l, m_s\rangle \}$:

L'espace des états $\mathscr{E} = \mathscr{E}_l \otimes \mathscr{E}_s$ est donc de dimension 10, et est rapporté à la base découplée :

0,5

$$\{ |\, m_l, m_s = \pm\rangle \} = \left\{ \left|2, \pm\frac{1}{2}\right\rangle, \left|1, \pm\frac{1}{2}\right\rangle, \left|0, \pm\frac{1}{2}\right\rangle, \left|-1, \pm\frac{1}{2}\right\rangle, \left|-2, \pm\frac{1}{2}\right\rangle \right\}$$

3. Les valeurs possibles prises par les nombres J et M :

Les règles de sélection établies par la théorie d'addition des moments cinétiques sont :

0,5

$$\begin{cases} |l - s| \le J \le l + s & \Rightarrow \quad \frac{3}{2} \le J \le \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad J = \frac{5}{2}, \frac{3}{2} \\ -J \le M \le J & \Rightarrow \quad -\frac{5}{2} \le M \le \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad M = \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2} \end{cases}$$

- Tableau résumant les différentes valeurs prises par J et M :

1

J	M	$\lvert J, M\rangle$	Sous - espaces
$\frac{5}{2}$	$\pm\frac{5}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}$	$\left\lvert\frac{5}{2}, \pm\frac{5}{2}\right\rangle, \left\lvert\frac{5}{2}, \pm\frac{3}{2}\right\rangle, \left\lvert\frac{5}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle$	$\mathscr{E}\left(J = \frac{5}{2}\right)$
$\frac{3}{2}$	$\pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}$	$\left\lvert\frac{3}{2}, \pm\frac{3}{2}\right\rangle, \left\lvert\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle$	$\mathscr{E}\left(J = \frac{3}{2}\right)$

- Base couplée $\{ |\, J, M\rangle \}$ de vecteurs propres communs à J^2 et J_z :

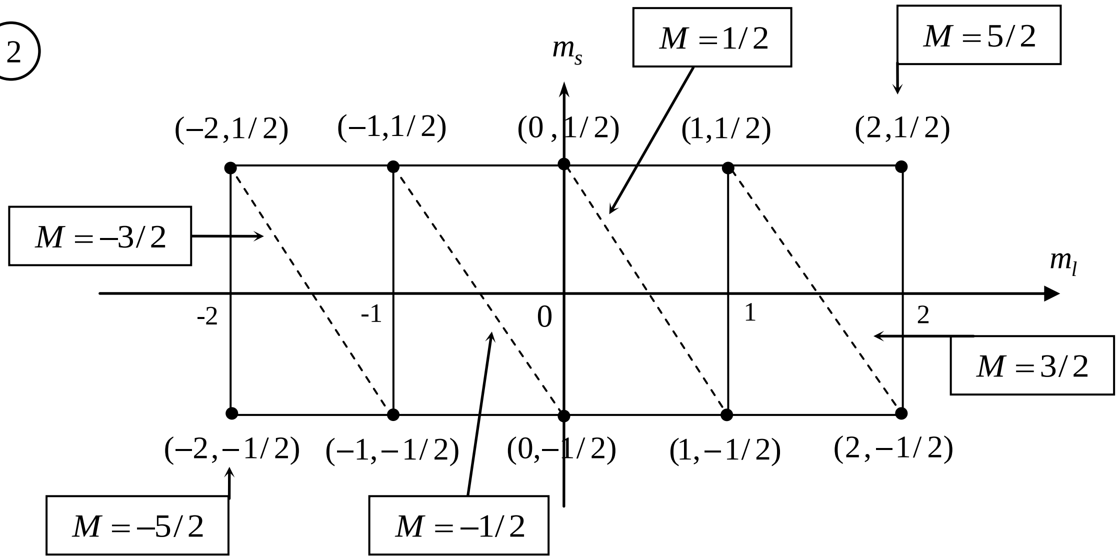
0,5

$$\{ |J, M\rangle \} = \left\{ \left|\frac{5}{2}, \pm\frac{5}{2}\right\rangle, \left|\frac{5}{2}, \pm\frac{3}{2}\right\rangle, \left|\frac{5}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2}, \pm\frac{3}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle \right\}$$

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}\left(J = \frac{5}{2}\right) \oplus \mathscr{E}\left(J = \frac{3}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \dim \mathscr{E} = 10$$

4. Degré de dégénérescence des différentes valeurs de M :

2



0,5

Ainsi, les valeurs $M = \pm\frac{5}{2}$ sont non dégénérées, alors que les valeurs $M = \pm\frac{3}{2}\,,\pm\frac{1}{2}$ sont deux fois dégénérées.

5. Expressions des vecteurs $\left| J\,,M \right\rangle$ en fonction des vecteurs $\left| m_l\,,m_s \right\rangle$:

a. Le sous-espace $\mathscr{E}\left(J=\frac{5}{2}\right)$:

- **Les kets $\left|\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right\rangle$ et $\left|\frac{5}{2},-\frac{5}{2}\right\rangle$:**

- La valeur $M=\frac{5}{2}$ correspondant à la seule combinaison $m_l=2$ et $m_s=\frac{1}{2}$. Donc, la valeur $M=\frac{5}{2}$ n'est pas dégénérée impliquant que les vecteurs $\left|\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right\rangle$ et $\left|2\,,\frac{1}{2}\right\rangle$ sont proportionnels :

$$\left|\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right\rangle = \alpha\left|2\,,\frac{1}{2}\right\rangle$$

Le vecteur $\left|\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right\rangle$ doit être normé à l'unité ; en choisissant le coefficient α réel et positif, on a :

0,5

$$\boxed{\left|\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right\rangle = \left|2\,,\frac{1}{2}\right\rangle}$$

- Le même raisonnement est valable pour le vecteur $\left|\frac{5}{2},-\frac{5}{2}\right\rangle$:

0,5

$$\boxed{\left|\frac{5}{2},-\frac{5}{2}\right\rangle = \left|-2\,,-\frac{1}{2}\right\rangle}$$

- **Le vecteur** $\left|\frac{5}{2},\ \frac{3}{2}\right\rangle$ **:**

Appliquons l'opérateur $J_- = L_- + S_-$ sur le ket $\left|\frac{5}{2},\ \frac{5}{2}\right\rangle = \left|2\ ,\ \frac{1}{2}\right\rangle$:

$$J_-\left|\frac{5}{2}\,,\frac{5}{2}\right\rangle = (L_- + S_-)\left|\,2\ ,\ 2\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{2}\right\rangle = \left(L_-\left|\,2\ ,\ 2\right\rangle\right)\otimes\left|\frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{2}\right\rangle + \left|\,2\ ,\ 2\right\rangle \otimes \left(S_-\left|\frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{2}\right\rangle\right)$$

$$\Rightarrow \quad \hbar\sqrt{5}\left|\frac{5}{2}\,,\ \frac{3}{2}\right\rangle = 2\hbar\,\left|\,2\ ,1\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{2}\right\rangle + \hbar\,\left|\,2\ ,\ 2\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2}\,,-\frac{1}{2}\right\rangle = 2\hbar\left|1\,,\ \frac{1}{2}\right\rangle + \hbar\left|2\,,-\frac{1}{2}\right\rangle$$

D'où :

1

$$\boxed{\left|\frac{5}{2}\,,\ \frac{3}{2}\right\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}}\left|1\,,\ \frac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}\left|2\,,-\frac{1}{2}\right\rangle}$$

- **Le vecteur** $\left|\frac{5}{2},\ \frac{1}{2}\right\rangle$ **:**

Appliquons l'opérateur $J_- = L_- + S_-$ sur le ket $\left|\frac{5}{2},\ \frac{3}{2}\right\rangle$:

$$J_-\left|\frac{5}{2}\,,\ \frac{3}{2}\right\rangle = (L_- + S_-)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\left|1\,,\ \frac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}\left|2\,,-\frac{1}{2}\right\rangle\right)$$

Soit :

$$\hbar 2\sqrt{2}\left|\frac{5}{2}\,,\ \frac{1}{2}\right\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}}\left[\left(L_-\left|\,2\ ,1\right\rangle\right)\otimes\left|\frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{2}\right\rangle + \left|\,2\ ,1\right\rangle \otimes \left(S_-\left|\frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{2}\right\rangle\right)\right]$$

$$+\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(L_-\left|\,2\ ,\ 2\right\rangle\right)\otimes\left|\frac{1}{2}\,,-\frac{1}{2}\right\rangle + \left|\,2\ ,\ 2\right\rangle \otimes \left(S_-\left|\frac{1}{2}\,,-\frac{1}{2}\right\rangle\right)\right]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}\left[\hbar\sqrt{6}\left|\,2\ ,\ 0\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{2}\right\rangle + \hbar\left|\,2\ ,1\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2}\,,-\frac{1}{2}\right\rangle\right] + \frac{1}{\sqrt{5}}\left[2\hbar\left|\,2\ ,1\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2}\,,-\frac{1}{2}\right\rangle + 0\right]$$

$$\Rightarrow \quad 2\sqrt{2}\left|\frac{5}{2}\,,\ \frac{1}{2}\right\rangle = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{5}}\left|0\,,\ \frac{1}{2}\right\rangle + \frac{4}{\sqrt{5}}\left|1\,,-\frac{1}{2}\right\rangle$$

D'où :

1

$$\boxed{\left|\frac{5}{2}\,,\ \frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{3}{5}}\left|0\,,\ \frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}}\left|1\,,-\frac{1}{2}\right\rangle}$$

- **Le vecteur** $\left|\frac{5}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$ **:**

Appliquons l'opérateur $J_- = L_- + S_-$ sur le ket $\left|\frac{5}{2},\ \frac{1}{2}\right\rangle$:

$$J_-\left|\frac{5}{2}\,,\ \frac{1}{2}\right\rangle = (L_- + S_-)\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\left|0\,,\ \frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}}\left|1\,,-\frac{1}{2}\right\rangle\right)$$

$$3\hbar\left|\frac{5}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{3}{5}}\left[\left(L_-|\,2\,,0\rangle\right)\otimes\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle+|\,2\,,0\rangle\otimes\left(S_-\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\right)\right]$$

$$+\sqrt{\frac{2}{5}}\left[\left(L_-|\,2\,,1\rangle\right)\otimes\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle+|\,2\,,1\rangle\otimes\left(S_-\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\right)\right]$$

$$=\sqrt{\frac{3}{5}}\left[\hbar\sqrt{6}\,|\,2\,,-1\rangle\otimes\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle+\hbar\,|\,2\,,0\rangle\otimes\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\right]+\sqrt{\frac{2}{5}}\left[\hbar\sqrt{6}\,|\,2\,,0\rangle\otimes\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle+0\right]$$

$$=\hbar\sqrt{\frac{18}{5}}\left|-1\,,\frac{1}{2}\right\rangle+\hbar\sqrt{\frac{3}{5}}\left|0\,,-\frac{1}{2}\right\rangle+\hbar\,2\sqrt{\frac{3}{5}}\left|0\,,-\frac{1}{2}\right\rangle$$

D'où :

1

$$\boxed{\left|\frac{5}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{2}{5}}\left|-1\,,\frac{1}{2}\right\rangle+\sqrt{\frac{3}{5}}\left|0\,,-\frac{1}{2}\right\rangle}$$

- **Le vecteur $\left|\frac{5}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle$:**

Appliquons l'opérateur $J_+=L_++S_+$ sur le ket $\left|\frac{5}{2},-\frac{5}{2}\right\rangle=\left|-2\,,-\frac{1}{2}\right\rangle$:

$$J_+\left|\frac{5}{2},-\frac{5}{2}\right\rangle=(L_++S_+)|\,2\,,-2\rangle\otimes\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle=\left(L_+|\,2\,,-2\rangle\right)\otimes\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle+|\,2\,,-2\rangle\otimes\left(S_+\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\right)$$

$$\Rightarrow\quad\hbar\sqrt{5}\left|\frac{5}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle=2\hbar\,|\,2\,,-1\rangle\otimes\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle+\hbar\,|\,2\,,-2\rangle\otimes\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle=2\hbar\left|-1\,,-\frac{1}{2}\right\rangle+\hbar\left|-2\,,\frac{1}{2}\right\rangle$$

D'où :

1

$$\boxed{\left|\frac{5}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle=\frac{2}{\sqrt{5}}\left|-1\,,-\frac{1}{2}\right\rangle+\frac{1}{\sqrt{5}}\left|-2\,,\frac{1}{2}\right\rangle}$$

b. Le sous -espace $\mathscr{E}\left(J=\frac{3}{2}\right)$:

- **Le vecteur $\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle$:**

La valeur $M=\frac{3}{2}$ est 2 fois dégénérée et correspondant aux deux combinaisons suivantes :

$$(m_l=1\,,m_s=\frac{1}{2})\ \text{ et }\ (m_l=2\,,m_s=-\frac{1}{2})$$

Donc, le vecteur $\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle$ est une combinaison linéaire des deux vecteurs correspondants :

$$\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle=\alpha\left|1,\frac{1}{2}\right\rangle+\beta\left|2\,,-\frac{1}{2}\right\rangle$$

- En tenant compte de la relation d'orthogonalité $\langle J',M|J\,,M\rangle=\delta_{JJ'}$, alors le vecteur $\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle$ doit être orthogonal au vecteur $\left|\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right\rangle$, soit :

$$\left\langle\frac{5}{2},\frac{3}{2}\middle|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle=\frac{2\alpha}{\sqrt{5}}+\frac{\beta}{\sqrt{5}}=0\quad\Rightarrow\quad\beta=-2\alpha$$

- La condition de normalisation s'écrit : $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

Ces deux conditions impliquent :

$$\alpha = \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{5}} \quad , \quad \beta = -\frac{2e^{i\theta}}{\sqrt{5}}$$

En choisissant le réel $\theta = 0$, on obtient :

1

$$\boxed{\left|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}\left|1, \frac{1}{2}\right\rangle - \frac{2}{\sqrt{5}}\left|2, -\frac{1}{2}\right\rangle}$$

Comme ce vecteur est défini à un facteur de phase, l'expression suivante est aussi acceptée :

$$\boxed{\left|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle = -\frac{1}{\sqrt{5}}\left|1, \frac{1}{2}\right\rangle + \frac{2}{\sqrt{5}}\left|2, -\frac{1}{2}\right\rangle}$$

- **Le vecteur** $\left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$ **:**

Appliquons l'opérateur $J_- = L_- + S_-$ sur le ket $\left|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle$:

$$J_-\left|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle = (L_- + S_-)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left|1, \frac{1}{2}\right\rangle - \frac{2}{\sqrt{5}}\left|2, -\frac{1}{2}\right\rangle\right)$$

Soit :

$$\hbar\sqrt{3}\left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(L_-|\,2\,,1\rangle\right)\otimes\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle + |\,2\,,1\rangle\otimes\left(S_-\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle\right)\right]$$
$$-\frac{2}{\sqrt{5}}\left[\left(L_-|\,2\,,2\rangle\right)\otimes\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle + |\,2\,,2\rangle\otimes\left(S_-\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle\right)\right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\hbar\sqrt{6}|\,2\,,0\rangle\otimes\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle + \hbar|\,2\,,1\rangle\otimes\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle\right] - \frac{2}{\sqrt{5}}\left[2\hbar|\,2\,,1\rangle\otimes\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle + 0\right]$$
$$\Rightarrow \quad \sqrt{3}\left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}\left|0, \frac{1}{2}\right\rangle - \frac{3}{\sqrt{5}}\left|1, -\frac{1}{2}\right\rangle$$

D'où :

1

$$\boxed{\left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{5}}\left|0, \frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{3}{5}}\left|1, -\frac{1}{2}\right\rangle}$$

Ou bien aussi :

$$\boxed{\left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle = -\sqrt{\frac{2}{5}}\left|0, \frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{3}{5}}\left|1, -\frac{1}{2}\right\rangle}$$

- **Le vecteur** $\left|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$ **:**

Appliquons l'opérateur $J_- = L_- + S_-$ sur le ket $\left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$:

$$J_-\left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle = (L_- + S_-)\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\left|0, \frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{3}{5}}\left|1, -\frac{1}{2}\right\rangle\right)$$

Soit :

$$2\hbar\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{2}{5}}\left[\left(L_-|\,2\,,0\rangle\right)\otimes\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle+|\,2\,,0\rangle\otimes\left(S_-\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\right)\right]$$
$$-\sqrt{\frac{3}{5}}\left[\left(L_-|\,2\,,1\rangle\right)\otimes\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle+|\,2\,,1\rangle\otimes\left(S_-\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\right)\right]$$
$$=\sqrt{\frac{2}{5}}\left[\hbar\sqrt{6}|\,2\,,-1\rangle\otimes\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle+\hbar|\,2\,,0\rangle\otimes\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\right]-\sqrt{\frac{3}{5}}\left[\hbar\sqrt{6}|\,2\,,0\rangle\otimes\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle+0\right]$$
$$=\hbar\sqrt{\frac{12}{5}}\left|-1\,,\frac{1}{2}\right\rangle+\hbar\sqrt{\frac{2}{5}}\left|0\,,-\frac{1}{2}\right\rangle-\hbar\,3\sqrt{\frac{2}{5}}\left|0\,,-\frac{1}{2}\right\rangle$$

D'où :

1

$$\boxed{\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{3}{5}}\left|-1\,,\frac{1}{2}\right\rangle-\sqrt{\frac{2}{5}}\left|0\,,-\frac{1}{2}\right\rangle}$$

Ou bien aussi :

$$\boxed{\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle=-\sqrt{\frac{3}{5}}\left|-1\,,\frac{1}{2}\right\rangle+\sqrt{\frac{2}{5}}\left|0\,,-\frac{1}{2}\right\rangle}$$

- **Le vecteur $\left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle$:**

Appliquons l'opérateur $J_-=L_-+S_-$ sur le ket $\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$:

$$J_-\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle=(L_-+S_-)\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\left|-1\,,\frac{1}{2}\right\rangle-\sqrt{\frac{2}{5}}\left|0\,,-\frac{1}{2}\right\rangle\right)$$

Soit :

$$\sqrt{3}\hbar\left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{3}{5}}\left[\left(L_-|\,2\,,-1\rangle\right)\otimes\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle+|\,2\,,-1\rangle\otimes\left(S_-\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\right)\right]$$
$$-\sqrt{\frac{2}{5}}\left[\left(L_-|\,2\,,0\rangle\right)\otimes\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle+|\,2\,,0\rangle\otimes\left(S_-\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\right)\right]$$

$$\sqrt{3}\hbar\left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{3}{5}}\left[2\hbar|\,2\,,-2\rangle\otimes\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle+\hbar|\,2\,,-1\rangle\otimes\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\right]-\sqrt{\frac{2}{5}}\left[\hbar\sqrt{6}|\,2\,,-1\rangle\otimes\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle+0\right]$$
$$=2\hbar\sqrt{\frac{3}{5}}\left|-2\,,\frac{1}{2}\right\rangle+\hbar\sqrt{\frac{3}{5}}\left|-1\,,-\frac{1}{2}\right\rangle-2\hbar\sqrt{\frac{3}{5}}\left|-1\,,-\frac{1}{2}\right\rangle=2\hbar\sqrt{\frac{3}{5}}\left|-2\,,\frac{1}{2}\right\rangle-\hbar\sqrt{\frac{3}{5}}\left|-1\,,-\frac{1}{2}\right\rangle$$

D'où :

1

$$\boxed{\left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle=\frac{2}{\sqrt{5}}\left|-2\,,\frac{1}{2}\right\rangle-\frac{1}{\sqrt{5}}\left|-1\,,-\frac{1}{2}\right\rangle}$$

Ou bien aussi :

$$\boxed{\left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle=-\frac{2}{\sqrt{5}}\left|-2\,,\frac{1}{2}\right\rangle+\frac{1}{\sqrt{5}}\left|-1\,,-\frac{1}{2}\right\rangle}$$

UNIVERSITÉ IBN ZOHR
FACULTÉ DES SCIENCES
AGADIR

Année universitaire 2017 - 2018
Session normale

Epreuve de Mécanique Quantique 2 – SMP5

Durée 2 h 00 - Aucun document n'est autorisé

Problème I (10 points) : Un moment cinétique $\vec{J}$ dans un champ magnétique

1. Soit un système physique de moment cinétique $\vec{J}$ caractérisé par le nombre quantique j et dont l'espace des états est rapporté à la base des vecteurs propres $|j,m\rangle$ communs à J^2 et J_z.

a. Ecrire les équations aux valeurs propres de J^2 et J_z.

b. Calculer les valeurs moyennes des opérateurs J_x, J_y et J_z dans l'état $|j,m\rangle$.

c. Calculer le commutateur $[J_+ , J_-]$.

d. En déduire la valeur moyenne de l'opérateur produit $J_x.J_y$ dans l'état $|j,m\rangle$.

e. Calculer $\vec{J} \wedge \vec{J}$ et en donner la signification.

2. Le système physique est un atome qui, dans son état fondamental, possède un moment cinétique $j = \dfrac{3}{2}$. Les états d'énergie de cet atome sont décrits par l'hamiltonien suivant :

$$H_0 = \frac{\omega_0}{\hbar}(3J_z^2 - J^2) \quad , \quad \omega_0 \text{ est une constante positive.}$$

a. Donner la base $\{|j,m\rangle\}$ constituée par les vecteurs propres communs à J^2 et J_z.

Remarque : les vecteurs de la base sont à classer par ordre décroissant du nombre m.

b. Montrer que les kets $|j,m\rangle$ sont vecteurs propres de H_0. Déterminer alors les énergies propres et leurs dégénérescences.

3. L'atome est plongé dans un champ magnétique statique $\vec{B}$ parallèle à Oz $(\vec{B} = B\vec{k})$. L'interaction avec ce champ est décrite par l'hamiltonien Zeeman H_z, tel que :

$$H_z = g\,\mu_B\,\vec{B}.\vec{J}$$

où g est le facteur de Landé et μ_B le magnéton de Bohr. On posera $g\,\mu_B\,B = \omega$.

a. Montrer que les kets $|j,m\rangle$ sont vecteurs propres de l'hamiltonien total $H = H_0 + H_z$. Déterminer alors les énergies propres et leurs dégénérescences.

b. Représenter sur un diagramme les niveaux d'énergie de l'atome et les états propres correspondants.

Quel est alors l'effet du champ magnétique $\vec{B}$ sur les niveaux d'énergie de l'atome ?

Problème II (10 points) : Perturbation quadratique d'un oscillateur harmonique

On considère un oscillateur harmonique unidimensionnel, de pulsation ω, constitué par une particule M de masse m en mouvement le long de l'axe Ox. Soit H_0 l'hamiltonien du système.

Le système subit l'action d'une perturbation quadratique d'hamiltonien :

$$W = \frac{1}{4}\lambda\hbar\omega\,(a^+ + a)^2 \quad \text{avec} \quad 0 < \lambda << 1$$

a et a^+ sont les opérateurs d'annihilation et de création.

On notera $E_n^{(0)}$ et $|\,n\,\rangle$ les énergies et vecteurs propres de l'hamiltonien non perturbé H_0 ; E_n et $|\psi_n\rangle$ ceux de l'hamiltonien total $H = H_0 + W$:

$$\begin{aligned} H_0\,|\,n\,\rangle &= E_n^{(0)}\,|\,n\,\rangle \\ H\,|\psi_n\rangle &= E_n\,|\psi_n\rangle \end{aligned} \qquad n \in \mathbb{N}$$

On se propose de calculer les énergies propres E_n et les états propres $|\psi_n\rangle$ de l'hamiltonien total *H*.

1. Application de la théorie des perturbations stationnaires :

a. Calculer les éléments de matrice $\langle k|W|n\rangle$ de la perturbation *W* et trouver les éléments de matrice non nuls.

b. Calculer :

i. la correction $E_n^{(1)}$ de l'énergie au premier ordre des perturbations ;

ii. la correction $E_n^{(2)}$ au deuxième ordre des perturbations.

iii. Donner alors l'énergie de l'hamiltonien total *H* sous la forme $E_n = E_n^{(0)} + E_n^{(1)} + E_n^{(2)}$.

c. Calculer, au premier ordre des perturbations, le vecteur propre $|\psi_n\rangle$ associé à E_n.

2. Calcul exact des énergies :

a. Ecrire l'hamiltonien de perturbation en fonction de l'observable position *X*.

b. En déduire l'expression exacte de l'énergie propre E_n de l'hamiltonien total *H*.

c. En écrivant, au second ordre en λ, le développement limité de l'expression exacte de E_n, retrouver l'expression approchée obtenue par la théorie des perturbations.

On donne l'expression de l'opérateur d'annihilation :

$$a = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(m\omega X + i\,P_x\right)$$

UNIVERSITÉ IBN ZOHR
FACULTÉ DES SCIENCES
AGADIR

Année universitaire 2017 - 2018
Session normale

Epreuve de Mécanique Quantique 2 – SMP5

Corrigé

Problème I (10 points) : Un moment cinétique j dans un champ magnétique

1. L'espace des états quantiques du système est rapporté à la base des vecteurs propres $|j,m\rangle$ communs à J^2 et J_z :

a. Les équations aux valeurs propres de J^2 et J_z :

0,5

$$J^2|j,m\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j,m\rangle \quad , \quad J_z|j,m\rangle = m\hbar|j,m\rangle$$

b. Valeurs moyennes des opérateurs J_x, J_y et J_z dans l'état $|j,m\rangle$:

On a :

0,5

$$\left.\begin{array}{l} J_+ = J_x + i\,J_y \\ J_- = J_x - i\,J_y \end{array}\right\} \Rightarrow \quad J_x = \frac{1}{2}(J_+ + J_-) \quad , \quad J_y = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-)$$

- **Valeur moyenne de J_x :**

$$\langle J_x\rangle = \langle j,m|J_x|j,m\rangle = \frac{1}{2}\langle j,m|J_+|j,m\rangle + \frac{1}{2}\langle j,m|J_-|j,m\rangle$$

0,5

$$= \frac{\hbar}{2}\sqrt{j(j+1)-m(m+1)}\,\langle j,m|j,m+1\rangle + \frac{\hbar}{2}\sqrt{j(j+1)-m(m-1)}\,\langle j,m|j,m-1\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \langle J_x\rangle = 0$$

- **Valeur moyenne de J_y :**

$$\langle J_y\rangle = \langle j,m|J_y|j,m\rangle = \frac{1}{2i}\langle j,m|J_+|j,m\rangle - \frac{1}{2i}\langle j,m|J_-|j,m\rangle$$

0,5

$$= \frac{\hbar}{2i}\sqrt{j(j+1)-m(m+1)}\,\langle j,m|j,m+1\rangle - \frac{\hbar}{2i}\sqrt{j(j+1)-m(m-1)}\,\langle j,m|j,m-1\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \langle J_y\rangle = 0$$

- **Valeur moyenne de J_z :**

0,5

$$\langle J_z\rangle = \langle j,m|J_z|j,m\rangle = m\hbar\,\langle j,m|j,m\rangle \qquad \Rightarrow \qquad \langle J_z\rangle = m\hbar$$

c. Le commutateur $[J_+ \,,\, J_-]$:

$$[J_+ \,,\, J_-] = [J_x + i\,J_y \,, J_x - i\,J_y]$$

0,5

$$= i\,[J_y\,,J_x] - i\,[J_x\,,J_y] = -2i\,[J_x\,,J_y] = -2i(i\hbar)\,J_z$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{[J_+ \,,\, J_-] = 2\hbar\, J_z}$$

d. Valeur moyenne de $J_x.J_y$ dans l'état $|\, j,m\rangle$:

$$J_x.J_y = \frac{(J_+ + J_-)(J_+ - J_-)}{4i} = \frac{J_+^2 - J_-^2 - [J_+, J_-]}{4i} = \frac{1}{4i}\left(J_+^2 - J_-^2\right) - \frac{1}{4i}[J_+, J_-]$$

Or : $[J_+, J_-] = 2\hbar.J_z$, donc :

0,5

$$\boxed{J_x.J_y = \frac{1}{4i}\left(J_+^2 - J_-^2\right) + \frac{i\hbar}{2}\, J_z}$$

Comme :

$$\left\langle J_+^2 \right\rangle = \left\langle J_-^2 \right\rangle = 0 \quad , \quad \left\langle J_z \right\rangle = m\hbar$$

Alors :

0,5

$$\boxed{\left\langle J_x.J_y \right\rangle = \frac{i m \hbar^2}{2}}$$

e. Calcul de $\vec{J} \wedge \vec{J}$:

$$\begin{aligned}\vec{J} \wedge \vec{J} &= \left(J_y J_z - J_z J_y\right)\vec{e}_x + \left(J_z J_x - J_x J_z\right)\vec{e}_y + \left(J_x J_y - J_y J_x\right)\vec{e}_z \\ &= \left[J_y, J_z\right]\vec{e}_x + \left[J_z, J_x\right]\vec{e}_y + \left[J_x, J_y\right]\vec{e}_z \\ &= i\hbar\, J_x\, \vec{e}_x + i\hbar\, J_y\, \vec{e}_y + i\hbar\, J_z\, \vec{e}_z\end{aligned}$$

D'où :

1

$$\boxed{\vec{J} \wedge \vec{J} = i\hbar \vec{J}}$$

Signification :

0,5

Cette relation signifie que les composantes J_x, J_y et J_z de $\vec{J}$ ne commutent pas entre elles, ce qui implique que les grandeurs associées ne sont pas compatibles et par suite obéissent aux relations d'indéterminations de Heisenberg.

2. Les états d'énergie de l'atome sont décrits par l'hamiltonien suivant :

$$H_0 = \frac{\omega_0}{\hbar}(3J_z^2 - J^2)$$

a. On a : $j = \frac{3}{2}$, donc m prend les valeurs suivantes : $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$. D'où la base de vecteurs propres communs à J^2 et J_z :

0,5

$$\mathcal{B} = \left\{ \left|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle \right\}$$

b. Action de H_0 sur les kets $|\, j,m\rangle$:

$$H_0 |\, j,m\rangle = \frac{\omega_0}{\hbar}\left(3J_z^2 - J^2\right)|\, j,m\rangle = \hbar\omega_0\left(3m^2 - j(j+1)\right)|\, j,m\rangle$$

Donc :

1

$$H_0\left|\frac{3}{2},\pm\frac{3}{2}\right\rangle = 3\hbar\omega_0\left|\frac{3}{2},\pm\frac{3}{2}\right\rangle$$

$$H_0\left|\frac{3}{2},\pm\frac{1}{2}\right\rangle = -3\hbar\omega_0\left|\frac{3}{2},\pm\frac{1}{2}\right\rangle$$

Les énergies propres $3\hbar\omega_0$ et $-3\hbar\omega_0$ de H_0 sont alors deux fois dégénérées :

0,5

- à l'énergie propre $3\hbar\omega_0$ sont associés les deux vecteurs propres $\left|\frac{3}{2},\pm\frac{3}{2}\right\rangle$;
- à l'énergie propre $-3\hbar\omega_0$ sont associés les deux vecteurs propres $\left|\frac{3}{2},\pm\frac{1}{2}\right\rangle$.

Par conséquent, la matrice de H_0 dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$H_0 = 3\hbar\omega_0\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. L'atome est plongé dans un champ magnétique statique $\vec{B}$ parallèle à Oz $(\vec{B} = B\vec{k})$. L'interaction avec ce champ est décrite par l'hamiltonien Zeeman H_z, tel que :

0,5

$$H_z = g\,\mu_B\,\vec{B}.\vec{J} = g\,\mu_B\,B.J_z = \omega\,J_z$$

L'hamiltonien total est alors :

$$H = H_0 + H_z = \frac{\omega_0}{\hbar}(3J_z^2 - J^2) + \omega\,J_z$$

a. Action de $H = H_0 + H_z$ sur les kets $|\,j,m\rangle$:

$$H|\,j,m\rangle = \left[\frac{\omega_0}{\hbar}\left(3J_z^2 - J^2\right) + \omega\,J_z\right]|\,j,m\rangle = \left[\hbar\,\omega_0\left(3m^2 - j(j+1)\right) + m\hbar\,\omega\right]|\,j,m\rangle$$

Donc :

1

$$H\left|\frac{3}{2},+\frac{3}{2}\right\rangle = \left(3\hbar\omega_0 + \frac{3}{2}\hbar\omega\right)\left|\frac{3}{2},+\frac{3}{2}\right\rangle$$

$$H\left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle = \left(3\hbar\omega_0 - \frac{3}{2}\hbar\omega\right)\left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle$$

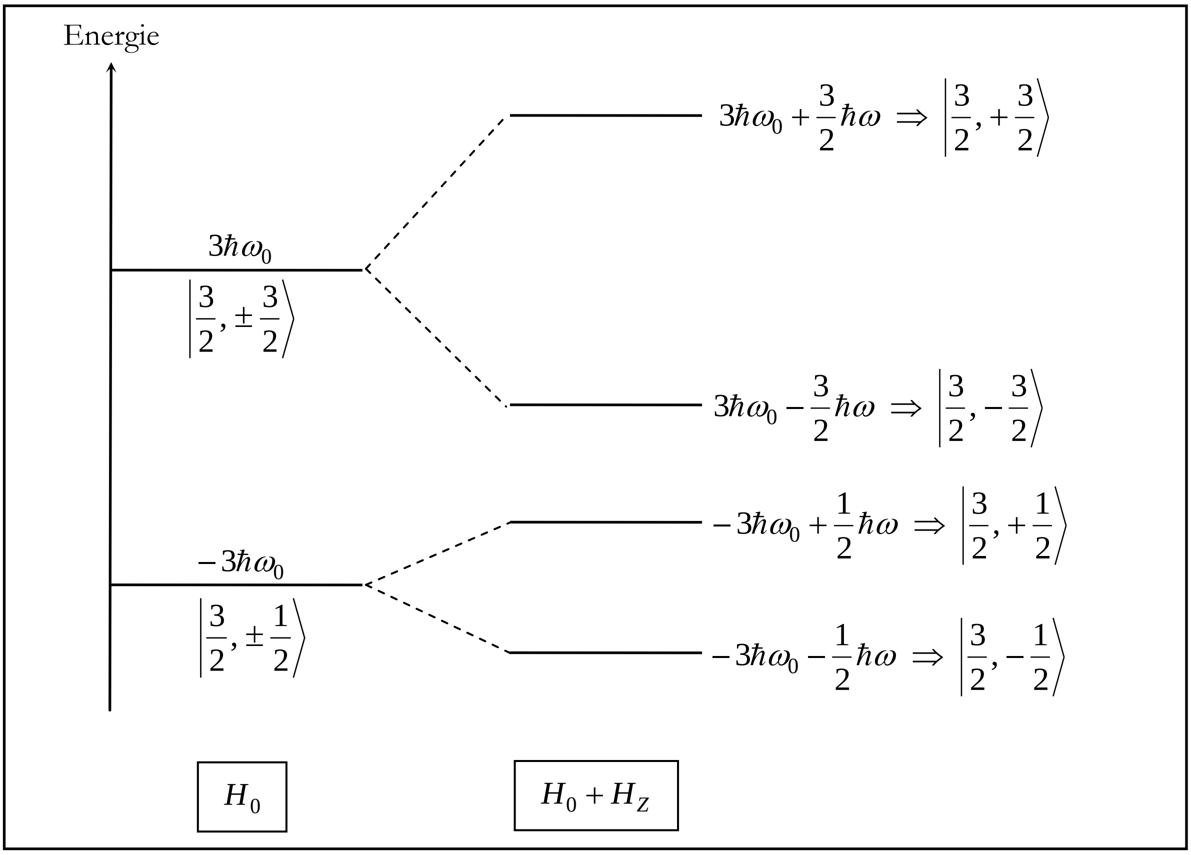
$$H\left|\frac{3}{2},+\frac{1}{2}\right\rangle = \left(-3\hbar\omega_0 + \frac{1}{2}\hbar\omega\right)\left|\frac{3}{2},+\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$H\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = \left(-3\hbar\omega_0 - \frac{1}{2}\hbar\omega\right)\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$$

$\Rightarrow$ **Les niveaux d'énergie de H ne sont plus dégénérés.**

b. Diagramme les niveaux d'énergie de l'atome :

1



0,5 **Effet du champ magnétique $\vec{B}$ sur les niveaux d'énergie de l'atome : levée complète de la dégénérescence.**

Problème II (10 points) : Perturbation quadratique d'un oscillateur harmonique

1. Application de la théorie des perturbations stationnaires :

a. Eléments de matrice de la perturbation W :

On a :

0,5
$$W = \frac{1}{4}\lambda\hbar\omega\left(a^2 + (a^+)^2 + 2N + 1\right)$$

Donc :

$$\langle k|W|n\rangle = \frac{1}{4}\lambda\hbar\omega\left[\langle k|a^2|n\rangle + \langle k|(a^+)^2|n\rangle + \langle k|(2N+1)|n\rangle\right]$$

1
$$= \frac{1}{4}\lambda\hbar\omega\left[\sqrt{n(n-1)}\,\langle k|n-2\rangle + \sqrt{(n+1)(n+2)}\,\langle k|n+2\rangle + (2n+1)\langle k|n\rangle\right]$$

$$= \frac{1}{4}\lambda\hbar\omega\left[\sqrt{n(n-1)}\,\delta_{k,n-2} + \sqrt{(n+1)(n+2)}\,\delta_{k,n+2} + (2n+1)\,\delta_{k,n}\right]$$

Donc, les seuls éléments de matrice non nuls sont :

$$\langle n|W|n\rangle = \frac{1}{2}\lambda\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

0,5

$$\langle n+2|W|n\rangle = \frac{1}{4}\lambda\sqrt{(n+1)(n+2)}\;\hbar\omega$$

$$\langle n-2|W|n\rangle = \frac{1}{4}\lambda\sqrt{n(n-1)}\;\hbar\omega$$

b. i. Correction $E_n^{(1)}$ de l'énergie au premier ordre des perturbations :

0,5

$$E_n^{(1)} = \langle n|W|n\rangle = \frac{1}{2}\lambda\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

ii. Correction $E_n^{(2)}$ au deuxième ordre des perturbations :

On a :

1

$$E_n^{(2)} = \sum_{k\neq n}\frac{\left|\langle k|W|n\rangle\right|^2}{E_n^{(0)}-E_k^{(0)}} = \frac{\left|\langle n+2|W|n\rangle\right|^2}{E_n^{(0)}-E_{n+2}^{(0)}} + \frac{\left|\langle n-2|W|n\rangle\right|^2}{E_n^{(0)}-E_{n-2}^{(0)}}$$

Or :

$$E_n^{(0)} - E_{n+2}^{(0)} = -2\hbar\omega \quad \text{et} \quad E_n^{(0)} - E_{n-2}^{(0)} = 2\hbar\omega$$

Donc :

$$E_n^{(2)} = \frac{-1}{2\hbar\omega}\frac{\lambda^2}{16}(\hbar\omega)^2\left[(n+1)(n+2)-n(n-1)\right] = -\frac{1}{32}\lambda^2\hbar\omega(4n+2)$$

Soit :

1

$$E_n^{(2)} = -\frac{1}{8}\lambda^2\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

Ainsi, au deuxième ordre des perturbations, l'énergie de l'hamiltonien total est :

$$E_n = E_n^{(0)} + E_n^{(1)} + E_n^{(2)} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega + \frac{\lambda}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega - \frac{\lambda^2}{8}\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

Soit :

1

$$E_n \approx \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{\lambda}{2}-\frac{\lambda^2}{8}\right)$$

c. Correction aux vecteurs propres au premier ordre des perturbations :

Au premier ordre de perturbation, les vecteurs propres de H sont donnés par :

1

$$|\psi_n\rangle \approx |\,n\rangle + \sum_{k\neq n}\frac{\langle k|W|n\rangle}{E_n^{(0)}-E_k^{(0)}}|k\rangle$$

$$\approx |\,n\rangle + \frac{\langle n+2|W|n\rangle}{E_n^{(0)}-E_{n+2}^{(0)}}|n+2\rangle + \frac{\langle n-2|W|n\rangle}{E_n^{(0)}-E_{n-2}^{(0)}}|n-2\rangle$$

Donc :

1

$$|\psi_n\rangle \approx |\,n\rangle - \frac{1}{8}\lambda\sqrt{(n+1)(n+2)}\;|n+2\rangle + \frac{1}{8}\lambda\sqrt{n(n-1)}\;|n-2\rangle$$

Ce qui montrer que, sous l'effet de la perturbation, les états propres $|n\rangle$ sont contaminés par les états $|n+2\rangle$ et $|n-2\rangle$.

2. Calcul direct des niveaux d'énergie de H :

a. Expression de W en fonction de l'observable position X :

On a :

$$a = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(m\omega X + iP) \qquad \text{et} \qquad a^{+} = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(m\omega X - iP)$$

Donc :

$$a + a^{+} = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\, X$$

Par conséquent :

0,5

$$W = \frac{1}{2}\lambda m\omega^2 X^2$$

b. Expression exacte de l'énergie E_n des états stationnaires de H :

Comme :

$$H_0 = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2$$

Alors :

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(1+\lambda) X^2$$

C'est l'hamiltonien d'un oscillateur harmonique unidimensionnel, de pulsation $\omega' = \omega\sqrt{1+\lambda}$, donc d'énergies propres :

1

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)\sqrt{1+\lambda} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

c. Comparaison avec le développement limité de l'expression exacte de E_n :

Comme $\lambda \ll 1$, écrivons le développement limité de $\sqrt{1+\lambda}$ au deuxième ordre en λ :

$$\sqrt{1+\lambda} \approx 1 + \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda^2}{8} + O(\lambda^3)$$

Donc, au deuxième ordre en λ, les énergies propres de H sont données par :

1

$$E_n \approx \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda^2}{8}\right) = E_n^{(0)} + E_n^{(1)} + E_n^{(2)}$$

On retrouve bien les résultats de la théorie des perturbations stationnaires.

UNIVERSITÉ IBN ZOHR
FACULTÉ DES SCIENCES
AGADIR

Année universitaire 2017 - 2018
Session de rattrapage

Epreuve de Mécanique Quantique 2 – SMP5

Durée : 2 h 00 - Aucun document n'est autorisé

Problème I (6 points) : Oscillateur harmonique à une dimension

On considère un oscillateur harmonique à une dimension de masse m et de pulsation ω. On désigne par $|\,n\,\rangle$ les états stationnaires d'énergie E_n, n étant un entier naturel. L'ensemble des états $|\,n\,\rangle$ est une base orthonormée complète de l'espace des états quantiques du système.

1. A l'instant $t=0$, l'état de cet oscillateur est une combinaison linéaire de l'état fondamental $|\,0\,\rangle$ et du premier état excité $|\,1\,\rangle$:

$$|\psi(0)\rangle = c_0|\,0\,\rangle + c_1|\,1\,\rangle$$

où c_0 et c_1 sont deux constantes non nulles.

a. Ecrire en fonction de c_0 et c_1 la condition de normalisation de $|\psi(0)\rangle$.

b. Calculer la valeur moyenne $\langle H \rangle$ de l'énergie dans l'état $|\psi(0)\rangle$.

c. Si on impose que $\langle H \rangle = \hbar\omega$, calculer $|c_0|$ et $|c_1|$.

2. Le vecteur d'état normé $|\psi(0)\rangle$ n'étant défini qu'à un facteur de phase global près, on fixe ce facteur de phase en prenant c_0 réel et positif et en posant $c_1 = |c_1|e^{i\theta}$, où $\theta \in \mathbb{R}$.

a. Ecrire le vecteur d'état $|\psi(0)\rangle$ en fonction du paramètre θ.

b. Calculer la valeur moyenne $\langle X \rangle$ de l'opérateur position X dans l'état $|\psi(0)\rangle$.

On rappelle la définition de l'opérateur d'annihilation a :

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}X + \frac{i}{\sqrt{2m\omega\hbar}}P_x$$

c. Calculer le paramètre θ si l'on impose, en plus de $\langle H \rangle = \hbar\omega$, que :

$$\langle X \rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

3. $|\psi(0)\rangle$ étant ainsi déterminé, écrire $|\psi(t)\rangle$ pour $t>0$ et calculer la valeur de θ à l'instant *t*. En déduire que la valeur moyenne $\langle X \rangle_t$ de la position à l'instant *t* est une fonction périodique du temps.

Problème II (14 points) : Addition de deux moments cinétiques de spin $\frac{3}{2}$ et $\frac{1}{2}$

On considère un système de deux particules (1) et (2) de moments cinétiques de spin respectifs $\vec{S}_1\ (S_{1x}\ , S_{1y}\ , S_{1z})$ et $\vec{S}_2\ (S_{2x}\ , S_{2y}\ , S_{2z})$, caractérisés par les nombres quantiques de spin $s_1 = \frac{3}{2}$ et $s_2 = \frac{1}{2}$.

On désigne par $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ les espaces des états de spin de chacune des deux particules. Les ensembles $\left\{ S_1^2\ , S_{1z} \right\}$ et $\left\{ S_2^2\ , S_{2z} \right\}$ forment des ECOC dans $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ respectivement.

Les états propres communs à S_1^2 et S_{1z} sont notés $|\ s_1\ , m_1 \rangle$, et ceux communs à S_2^2 et S_{2z} sont notés $|\ s_2\ , m_2 \rangle$. On désigne par $\left\{ |\ s_1, s_2, m_1, m_2 \rangle \right\}$ que l'on notera simplement $\left\{ |\ m_1\ , m_2 \rangle \right\}$ la base découplée formée par les vecteurs propres communs à S_1^2 , S_2^2 , S_{1z} et S_{2z}.

Le spin total des deux particules est $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$, et on note par $|S\ , M\rangle$ les vecteurs propres communs aux observables S_1^2 , S_2^2 , S^2 et S_z .

1. Donner les vecteurs de la base découplée $\left\{ |\ m_1\ , m_2 \rangle \right\}$.

2. Quelles sont les valeurs prises par les nombres quantiques *S* et *M* ? Donner les vecteurs de la base couplée $\left\{ |S\ , M\rangle \right\}$.

3. En utilisant **la méthode du rectangle**, reporter les différentes valeurs de m_1 et m_2 sur un système de coordonnées et calculer le degré de dégénérescence des valeurs de *M*.

4. En appliquant **la théorie de l'addition des moments cinétiques**, donner les expressions des vecteurs $|S\ , M\rangle$ en fonction des vecteurs $|\ m_1\ , m_2 \rangle$.

5. En fait, les moments cinétiques de spin des deux particules sont couplés par l'hamiltonien d'interaction suivant :

$$H = \frac{2a}{\hbar^2}\left(\vec{S}_1 + \vec{S}_2\right).\vec{S}_2 + \frac{b}{\hbar^2}\left(S_{1z} + S_{2z}\right)^2$$

a et b sont des constantes de couplage ayant la dimension d'une énergie.

a. Exprimer *H* en fonction des observables S^2 , S_z , S_1^2 , S_2^2 et des constantes a , b et $\hbar$.

b. Calculer les énergies propres $E_{S,M}$ de *H*, les états propres $|\ S\ , M \rangle$ associés et leurs dégénérescences. Rassembler les résultats dans le tableau suivant :

S	M	Energie $E_{S,M}$	Etat $|\ S\ , M \rangle$	Dégénérescence

UNIVERSITÉ IBN ZOHR
FACULTÉ DES SCIENCES
AGADIR

Année universitaire 2017 - 2018
Session de rattrapage

Epreuve de Mécanique Quantique 2 – SMP5

Corrigé

Problème I (6 points) : Oscillateur harmonique à une dimension

1. A l'instant $t=0$, l'état de cet oscillateur est donné par :

$$|\psi(0)\rangle = c_0|\,0\,\rangle + c_1|\,1\,\rangle$$

où c_0 et c_1 sont deux constantes non nulles.

a. Condition de normalisation de $|\psi(0)\rangle$:

$$|\psi(0)\rangle = c_0|\,0\,\rangle + c_1|\,1\,\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle\psi(0)|\psi(0)\rangle = 1 \quad \Rightarrow \quad |c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$$

D'où :

0,5

$$\boxed{|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1}$$

b. Valeur moyenne $\langle H\rangle$ de l'énergie dans l'état $|\psi(0)\rangle$:

$$\begin{aligned}\langle H\rangle = \langle\psi(0)|H|\psi(0)\rangle &= \left[c_0^*\langle\,0\,| + c_1^*\langle\,1\,|\right]\left[c_0 H|\,0\,\rangle + c_1 H|\,1\,\rangle\right] \\ &= \left[c_0^*\langle\,0\,| + c_1^*\langle\,1\,|\right]\left[\frac{1}{2}\hbar\omega c_0|\,0\,\rangle + \frac{3}{2}\hbar\omega c_1|\,1\,\rangle\right]\end{aligned}$$

Donc :

0,5

$$\boxed{\langle H\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega\left[|c_0|^2 + 3|c_1|^2\right]}$$

c. Si on impose de plus $\langle H\rangle = \hbar\omega$, alors :

$$\langle H\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega\left(|c_0|^2 + 3|c_1|^2\right) = \hbar\omega \quad \Rightarrow \quad |c_0|^2 + 3|c_1|^2 = 2$$

On a alors les deux équations vérifiées par $|c_0|^2$ et $|c_1|^2$:

$$\begin{cases}|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1 & (1) \\ |c_0|^2 + 3|c_1|^2 = 2 & (2)\end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned}&(1) \quad \Rightarrow \quad |c_0|^2 = 1 - |c_1|^2 \\ &(2) \quad \Rightarrow \quad 1 - |c_1|^2 + 3|c_1|^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad 2|c_1|^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad |c_1|^2 = \frac{1}{2}\end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad |c_0|^2 = |c_1|^2 = \frac{1}{2}$$

D'où :

(0,5) $$\boxed{|c_0| = |c_1| = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

2. a. Le vecteur d'état $|\psi(0)\rangle$ en fonction du paramètre θ :

En prenant c_0 réel et positif et en posant $c_1 = |c_1| e^{i\theta}$, on a :

$$\boxed{c_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta}}$$

Le vecteur d'état $|\psi(0)\rangle$ s'écrit alors :

(0,5) $$\boxed{|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\, 0 \,\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta} |\, 1 \,\rangle}$$

b. Valeur moyenne $\langle X \rangle$ de X dans l'état $|\psi(0)\rangle$: $\langle X \rangle = \langle \psi(0) | X | \psi(0) \rangle$

L'expression de l'opérateur position X est donnée par :

$$X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \; (a^+ + a)$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\langle X \rangle &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left[\langle\, 0 \,| + e^{-i\theta} \langle\, 1 \,| \right] (a^+ + a) \left[|\, 0 \,\rangle + e^{i\theta} |\, 1 \,\rangle \right] \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left[\langle\, 0 \,| + e^{-i\theta} \langle\, 1 \,| \right] \left[a^+ |\, 0 \,\rangle + e^{i\theta} a^+ |\, 1 \,\rangle + a |\, 0 \,\rangle + e^{i\theta} a |\, 1 \,\rangle \right] \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left[\langle\, 0 \,| + e^{-i\theta} \langle\, 1 \,| \right] \left[|\, 1 \,\rangle + e^{i\theta} \sqrt{2} |\, 2 \,\rangle + 0 + e^{i\theta} |\, 0 \,\rangle \right] \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(e^{i\theta} + e^{-i\theta} \right)
\end{aligned}$$

D'où :

(1) $$\boxed{\langle X \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \cos\theta}$$

c. Si, en plus de $\langle H \rangle = \hbar\omega$, on impose que $\langle X \rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$, alors :

$$\langle X \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \cos\theta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

D'où :

(0,5) $$\boxed{\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\,\pi}$$

3. Le vecteur d'état $|\psi(0)\rangle$ s'écrit alors :

0,5

$$\boxed{|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\,0\,\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}|\,1\,\rangle}$$

Le vecteur d'état $|\psi(t)\rangle$ à l'instant $t > 0$:

$$|\psi(t)\rangle = U(t,0)|\psi(0)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}|\,0\,\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}|1\rangle\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i}{2}\omega t}\,|\,0\,\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}e^{-\frac{3i}{2}\omega t}\,|1\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i}{2}\omega t}\left[\,|\,0\,\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(\frac{\pi}{4}-\omega t)}\,|1\rangle\right]$$

$|\psi(t)\rangle$ peut aussi s'écrire :

1

$$\boxed{|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i}{2}\omega t}\left[\,|\,0\,\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta(t)}\,|\,1\rangle\right]}$$

où la phase $\theta(t)$ est donnée par :

0,5

$$\boxed{\theta(t) = \frac{\pi}{4} - \omega t}$$

- **La valeur moyenne $\langle X\rangle_t$ de la position à l'instant *t* : $\langle X\rangle_t = \langle\psi(t)|X|\psi(t)\rangle$**

$$\langle X\rangle_t = \frac{1}{2}e^{\frac{i}{2}\omega t}e^{-\frac{i}{2}\omega t}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\begin{pmatrix}1 & e^{-i\theta(t)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ e^{i\theta(t)}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\begin{pmatrix}1 & e^{-i\theta(t)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{i\theta(t)}\\ 1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(e^{i\theta(t)} + e^{-i\theta(t)}\right)$$

Donc :

0,5

$$\boxed{\langle X\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\cos\theta(t)}$$

Ou bien :

$$\langle X\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \omega t\right) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\cos\frac{\pi}{4}.\cos\omega t + \sin\frac{\pi}{4}.\sin\omega t\right)$$

Soit :

$$\boxed{\langle X\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\left(\cos\omega t + \sin\omega t\right)}$$

Problème II (14 points) : Addition de deux moments cinétiques de spin $\frac{3}{2}$ et $\frac{1}{2}$

1. Les vecteurs de la base découplée $\{|\, m_1, m_2\rangle\}$:

On a :

$$s_1 = \frac{3}{2} \quad\Rightarrow\quad m_1 = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \qquad ; \qquad s_2 = \frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad m_2 = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$$

Donc, les vecteurs de la base $\{|\, m_1, m_2\rangle\}$ sont :

1

$$\left\{ \left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle, \left|-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle, \left|-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle, \left|-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle, \left|-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle \right\}$$

2. Les valeurs de S et de M et la base $\{|S, M\rangle\}$:

Les règles de sélection établies par la théorie d'addition des moments cinétiques sont :

$$|s_1 - s_2| \le S \le s_1 + s_2 \qquad , \qquad -S \le M \le S$$

- **Les différentes valeurs prises par S et M :**

0,5

$$S = 2, 1 \qquad ; \qquad M = 2, 1, 0, -1, -2$$

- **Les vecteurs de la base couplée sont :**

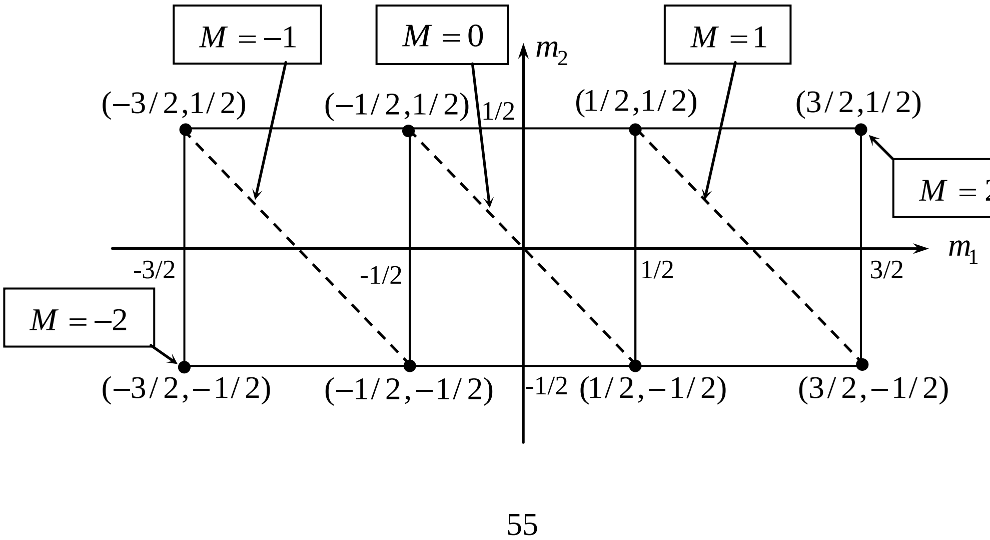
0,5

$$\{|S,M\rangle\} = \{|\,2,2\rangle, |\,2,1\rangle, |\,2,0\rangle, |\,2,-1\rangle, |\,2,-2\rangle, |1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle\}$$

S	M	$\lvert S,M\rangle$	$\mathscr{E}$
2	$2, 1, 0, -1, -2$	$\lvert 2,2\rangle, \lvert 2,1\rangle, \lvert 2,0\rangle, \lvert 2,-1\rangle\ \lvert 2,-2\rangle$	$\mathscr{E}\ (S=2)$
1	$1, 0, -1$	$\lvert 1,1\rangle, \lvert 1,0\rangle, \lvert 1,-1\rangle$	$\mathscr{E}\ (S=1)$

3. Dégénérescence des valeurs de M :

1.5



0,5

M	$g(M)$
$M=\pm 2$	1
$M=\pm 1$	2
$M=0$	

4. Expressions des vecteurs de la base couplée $\{|S,M\rangle\}$ en fonction des vecteurs de la base découplée $\{|m_1,m_2\rangle\}$:

i. Le sous - espace $\mathscr{E}(S=2)$:

- **Le vecteur $|2,2\rangle$:**

La valeur $M=2$ correspondant à la seule combinaison $m_1=\frac{3}{2}$ et $m_2=\frac{1}{2}$. Donc, la valeur $M=2$ n'est pas dégénérée impliquant que les vecteurs $|2,2\rangle$ et $\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$ sont proportionnels :

$$|2,2\rangle=\alpha\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$$

Le vecteur $|2,2\rangle$ doit être normé à l'unité ; en choisissant le coefficient α réel et positif, on a :

0,5

$$\boxed{|2,2\rangle=\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle}$$

- Le même raisonnement est valable pour le vecteur $|2,-2\rangle$:

0,5

$$\boxed{|2,-2\rangle=\left|-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle}$$

- **Le vecteur $|2,1\rangle$:**

Appliquons une fois $S_-=S_{1-}+S_{2-}$ sur le ket $|2,2\rangle$:

$$S_-|2,2\rangle=S_{1-}\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle+S_{2-}\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle \;\Rightarrow\; 2\hbar\,|2,1\rangle=\hbar\sqrt{3}\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle+\hbar\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$$

D'où :

1

$$\boxed{|2,1\rangle=\frac{1}{2}\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle+\frac{\sqrt{3}}{2}\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle}$$

- **Le vecteur $|2,0\rangle$:**

Appliquons une fois $S_-=S_{1-}+S_{2-}$ sur le ket $|2,1\rangle$:

$$S_-|\,2\,,1\rangle=\frac{1}{2}\,S_{1-}\left|\frac{3}{2}\,,-\frac{1}{2}\right\rangle+\frac{\sqrt{3}}{2}\,S_{1-}\left|\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\right\rangle+\frac{1}{2}S_{2-}\left|\frac{3}{2}\,,-\frac{1}{2}\right\rangle+\frac{\sqrt{3}}{2}S_{2-}\left|\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$\Rightarrow\quad \hbar\sqrt{6}\,|\,2\,,0\rangle=\frac{\sqrt{3}}{2}\,\hbar\left|\frac{1}{2}\,,-\frac{1}{2}\right\rangle+\frac{\sqrt{3}}{2}\,2\hbar\left|-\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\right\rangle+0+\frac{\sqrt{3}}{2}\hbar\left|\frac{1}{2}\,,-\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$\Rightarrow\quad \sqrt{6}\,|\,2\,,0\rangle=\sqrt{3}\left|\frac{1}{2}\,,-\frac{1}{2}\right\rangle+\sqrt{3}\left|-\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\right\rangle$$

D'où :

1

$$\boxed{|\,2\,,0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{1}{2}\,,-\frac{1}{2}\right\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}\left|-\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\right\rangle}$$

- **Le vecteur $|\,2\,,-1\rangle$:**

Appliquons une fois $S_+=S_{1+}+S_{2-}$ sur le ket $|\,2\,,-2\rangle$:

$$S_+|\,2\,,-2\rangle=S_{1+}\left|-\frac{3}{2}\,,-\frac{1}{2}\right\rangle+S_{2+}\left|-\frac{3}{2}\,,-\frac{1}{2}\right\rangle\quad\Rightarrow\quad 2\hbar\,|\,2\,,-1\rangle=\hbar\sqrt{3}\left|-\frac{1}{2}\,,-\frac{1}{2}\right\rangle+\hbar\left|-\frac{3}{2}\,,+\frac{1}{2}\right\rangle$$

D'où :

1

$$\boxed{|\,2\,,-1\rangle=\frac{1}{2}\left|-\frac{3}{2}\,,+\frac{1}{2}\right\rangle+\frac{\sqrt{3}}{2}\left|-\frac{1}{2}\,,-\frac{1}{2}\right\rangle}$$

ii. Le sous - espace $\mathscr{E}(S=1)$:

- **Le vecteur $|1\,,1\rangle$:**

La valeur $M=1$ correspondant aux deux combinaisons suivantes :

$$(m_1=\frac{1}{2}\,,\,m_2=\frac{1}{2})\ \text{ et }\ (m_1=\frac{3}{2}\,,\,m_2=-\frac{1}{2})$$

Donc, le vecteur $|1\,,1\rangle$ est une combinaison linéaire des deux vecteurs correspondants :

$$|1\,,1\rangle=\alpha\left|\frac{3}{2}\,,-\frac{1}{2}\right\rangle+\beta\left|\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\right\rangle$$

Le vecteur $|1\,,1\rangle$ doit être normé à l'unité et orthogonal au vecteur $|\,2\,,1\rangle$:

- La condition de normalisation s'écrit : $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$
- L'orthogonalité avec $|\,2\,,1\rangle$ s'écrit : $\alpha+\sqrt{3}\,\beta=0$

Ces deux conditions impliquent :

$$\beta=\frac{1}{2}e^{i\theta}\quad,\quad \alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\theta}$$

En choisissant le réel $\theta=0$, on obtient :

1

$$\boxed{|1\,,1\rangle=-\frac{\sqrt{3}}{2}\left|\frac{3}{2}\,,-\frac{1}{2}\right\rangle+\frac{1}{2}\left|\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\right\rangle}$$

Comme ce vecteur est défini à un facteur de phase, l'expression suivante est aussi acceptée :

$$\boxed{\left|1\,,1\right\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}\left|\frac{3}{2}\,,-\frac{1}{2}\right\rangle - \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\right\rangle}$$

- **Le vecteur** $\left|1\,,0\right\rangle$ **:**

Appliquons une fois $S_- = S_{1-} + S_{2-}$ sur le ket $\left|1\,,1\right\rangle$:

$$S_-\left|1\,,1\right\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}S_{1-}\left|\frac{3}{2}\,,-\frac{1}{2}\right\rangle - \frac{1}{2}S_{1-}\left|\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\right\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}S_{2-}\left|\frac{3}{2}\,,-\frac{1}{2}\right\rangle - \frac{1}{2}S_{2-}\left|\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$\Rightarrow\quad \hbar\sqrt{2}\left|1\,,0\right\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar\sqrt{3}\left|\frac{1}{2}\,,-\frac{1}{2}\right\rangle - \frac{1}{2}2\hbar\left|-\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\right\rangle + 0 - \frac{1}{2}\hbar\left|\frac{1}{2}\,,-\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$\Rightarrow\quad \sqrt{2}\left|1\,,0\right\rangle = \left|\frac{1}{2}\,,-\frac{1}{2}\right\rangle - \left|-\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\right\rangle$$

D'où :

1

$$\boxed{\left|1\,,0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{1}{2}\,,-\frac{1}{2}\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\left|-\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\right\rangle}$$

L'expression suivante est aussi acceptée :

$$\boxed{\left|1\,,0\right\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{1}{2}\,,-\frac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|-\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\right\rangle}$$

- **Le vecteur** $\left|1\,,-1\right\rangle$ **:**

Appliquons $S_- = S_{1-} + S_{2-}$ sur le ket $\left|1\,,0\right\rangle$:

$$S_-\left|1\,,0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}S_{1-}\left|\frac{1}{2}\,,-\frac{1}{2}\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}S_{1-}\left|-\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}S_{2-}\left|\frac{1}{2}\,,-\frac{1}{2}\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}S_{2-}\left|-\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$\Rightarrow\quad \hbar\sqrt{2}\left|1\,,-1\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}2\hbar\left|-\frac{1}{2}\,,-\frac{1}{2}\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\hbar\sqrt{3}\left|-\frac{3}{2}\,,\frac{1}{2}\right\rangle + 0 - \frac{1}{\sqrt{2}}\hbar\left|-\frac{1}{2}\,,-\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$\Rightarrow\quad \sqrt{2}\left|1\,,-1\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|-\frac{1}{2}\,,-\frac{1}{2}\right\rangle - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\left|-\frac{3}{2}\,,\frac{1}{2}\right\rangle$$

D'où :

1

$$\boxed{\left|1\,,-1\right\rangle = \frac{1}{2}\left|-\frac{1}{2}\,,-\frac{1}{2}\right\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2}\left|-\frac{3}{2}\,,\frac{1}{2}\right\rangle}$$

L'expression suivante est aussi acceptée :

$$\boxed{\left|1\,,-1\right\rangle = -\frac{1}{2}\left|-\frac{1}{2}\,,-\frac{1}{2}\right\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}\left|-\frac{3}{2}\,,\frac{1}{2}\right\rangle}$$

5. a. Expression de H en fonction des observables S^2, S_z, S_1^2, S_2^2 :

$$H = \frac{2a}{\hbar^2}\left(\vec{S}_1.\vec{S}_2 + S_2^2\right) + \frac{b}{\hbar^2}\left(S_{1z} + S_{2z}\right)^2$$

Or :

$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 \quad \Rightarrow \quad S^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2\vec{S}_1.\vec{S}_2 \quad \Rightarrow \quad \vec{S}_1.\vec{S}_2 = \frac{1}{2}\left(S^2 - S_1^2 - S_2^2\right)$$

$$S_z = S_{1z} + S_{2z}$$

Donc :

1

$$\boxed{H = \frac{a}{\hbar^2}\left(S^2 - S_1^2 + S_2^2\right) + \frac{b}{\hbar^2}S_z^2}$$

Comme :

$$s_1 = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad S_1^2 = \frac{15}{4}\hbar^2.\mathrm{I} \quad ; \quad s_2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad S_2^2 = \frac{3}{4}\hbar^2.\mathrm{I}$$

Donc :

$$\boxed{H = \frac{a}{\hbar^2}\left(S^2 - 3\hbar^2.\mathrm{I}\right) + \frac{b}{\hbar^2}S_z^2}$$

b. Energies propres de H et vecteurs propres $|\, S, M \rangle$ associés :

$$H|S,M\rangle = \left[a\left(S(S+1) - 3\right) + bM^2\right]|S,M\rangle = E_{S,M}\,|S,M\rangle$$

Donc, les énergies propres de H sont :

$$\boxed{E_{S,M} = a\left[S(S+1) - 3\right] + b.M^2}$$

Tableau des résultats :

2

S	M	Energie $E_{S,M}$	Etat $\|\, S, M\rangle$	Dégénérescence
2	$2, -2$	$3a + 4b$	$\|2, 2\rangle$, $\|2, -2\rangle$	2
	$1, -1$	$3a + b$	$\|2, 1\rangle$, $\|2, -1\rangle$	2
	0	$3a$	$\|2, 0\rangle$	1
1	$1, -1$	$-a + b$	$\|1, 1\rangle$, $\|1, -1\rangle$	2
	0	$-a$	$\|1, 0\rangle$	1

UNIVERSITÉ IBN ZOHR
FACULTÉ DES SCIENCES
AGADIR

Année universitaire 2016 - 2017
Session normale

Epreuve de Mécanique Quantique 2 – SMP5

Durée : 2 h 00 - Aucun document n'est autorisé

Problème I (10 points) : Moment cinétique orbital et harmoniques sphériques

1. On considère une particule M de masse μ qui évolue dans le potentiel central $V(r)$.

a. Ecrire, en coordonnées sphériques, l'équation de Schrödinger indépendante du temps vérifiée par la fonction d'onde $\psi(r,\theta,\varphi)$ des états stationnaires d'énergie E.

b. Dire pourquoi la fonction d'onde peut s'écrire sous la forme :

$$\psi(r,\theta,\varphi) = R(r)Y_l^m(\theta,\varphi)$$

où $R(r)$ est la fonction d'onde radiale et $Y_l^m(\theta,\varphi) = \langle \theta,\varphi \mid l,m \rangle$ sont les harmoniques sphériques, fonctions propres communes aux observables L^2 et L_z ; l et m étant les nombres quantiques associés au moment cinétique orbital.

c. Pour une valeur de l fixée, donner l'équation différentielle satisfaite par la fonction radiale $R(r)$.

2. **a.** Montrer que $Y_l^m(\theta,\varphi)$ s'écrit sous la forme :

$$Y_l^m(\theta,\varphi) = F_{l,m}(\theta)G_m(\varphi)$$

Donner l'expression de la fonction $G_m(\varphi)$ et les valeurs prises par le nombre quantique m.

b. On considère le cas $m = l$, montrer que :

$$F_{l,l}(\theta) = C_l\,(\sin\theta)^l$$

où C_l est la constante de normalisation.

c. Indiquer, **sans détailler les calculs**, comment obtenir $Y_l^m(\theta,\varphi)$ à partir de $Y_l^l(\theta,\varphi)$.

d. Sachant que $C_l = \dfrac{(-1)^l}{2^l\, l!}\sqrt{\dfrac{(2l+1)!}{4\pi}}$, déterminer les expressions des harmoniques sphériques correspondantes à $l = 1$: $Y_1^1(\theta,\varphi)$, $Y_1^0(\theta,\varphi)$, $Y_1^{-1}(\theta,\varphi)$.

Formulaire :

$$\Delta(\bullet) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\bullet) - \frac{L^2}{\hbar^2 r^2}(\bullet) \quad ; \quad L_z = -i\hbar.\frac{\partial}{\partial\varphi} \quad ; \quad L_\pm = \pm\hbar e^{\pm i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \pm i\cot g\theta.\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

Problème II (10 points) : Moment cinétique $j=1$ dans un champ magnétique

On considère un système quantique de moment cinétique $j=1$. Le sous-espace $\mathscr{E}_1$ à trois dimensions, associé au système, est rapporté à la base $\{|j=1,m\rangle\}$ que l'on notera simplement $\{|m\rangle\}$, où les vecteurs $|m\rangle$ **sont classés par ordre décroissant** du nombre quantique m.

L'hamiltonien H_0 du système est :

$$H_0 = a\,J_z + \frac{b}{\hbar}J_z^2$$

où a et b sont deux constantes positives, ayant les dimensions d'une pulsation.

1. Quels sont les niveaux d'énergie du système ?

2. On applique un champ magnétique statique $\vec{B}$ dans une direction de vecteur unitaire $\vec{u}$ définie par les angles θ et φ :

$$\vec{u} = \sin\theta\cos\varphi.\vec{e}_x + \sin\theta\sin\varphi.\vec{e}_y + \cos\theta.\vec{e}_z$$

L'interaction du champ $\vec{B}$ avec le moment magnétique du système $\overrightarrow{M} = \gamma\vec{J}$ (γ est le rapport gyromagnétique, supposé négatif) est décrite par l'hamiltonien :

$$W = -\overrightarrow{M}.\vec{B}$$

On notera $\omega = -\gamma B$ la pulsation de Larmor. L'hamiltonien total du système est alors :

$$H = H_0 + W$$

a. Donner l'expression de l'hamiltonien d'interaction W en fonction des opérateurs J_+, J_- et J_z et des données du problème.

b. Calculer la matrice représentant W dans la base $\{|m\rangle\}$.

3. On suppose que $b=a$ et que la direction du champ magnétique $\vec{B}$ est parallèle à l'axe Ox : $\vec{u} = \vec{e}_x$. On suppose aussi que $\omega << a$.

a. Calculer, **au premier ordre** de perturbation, l'énergie propre du **niveau fondamental** et, **à l'ordre zéro**, le **vecteur propre** correspondant.

b. Calculer, **au premier ordre** puis **au second ordre** de perturbation, **l'énergie propre** du **niveau excité.**

Résumer les résultats sur un diagramme d'énergie.

4. On suppose que $b=2a$ et que $\omega << a$. La direction du vecteur $\vec{u}$ est maintenant quelconque (son expression est donnée dans la question **2.**).

Calculer, **au premier ordre** de perturbation, **le vecteur propre** du **niveau fondamental**.

UNIVERSITÉ IBN ZOHR
FACULTÉ DES SCIENCES
AGADIR

Année universitaire 2016 - 2017
Session normale

Epreuve de Mécanique Quantique 2 – SMP5

Corrigé

Problème I (10 points) : Moment cinétique orbital et harmoniques sphériques

1. Soient une particule M de masse μ qui évolue dans le potentiel central $V(r)$ et $\psi(r,\theta,\varphi)$ la fonction d'onde des états stationnaires d'énergie E.

a. L'opérateur hamiltonien du système en coordonnées sphériques est :

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta + V(r) = -\frac{\hbar^2}{2\mu r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r)$$

L'équation de Schrödinger indépendante du temps satisfaite par les états stationnaires du système $\psi(r,\theta,\varphi)$ est :

1

$$\boxed{\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r)\right]\psi(r,\theta,\varphi) = E\ \psi(r,\theta,\varphi) \qquad (*)}$$

b. Factorisation de la fonction d'onde :

On a :

1

$$H = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2\mu r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + V(r)}_{H_r} + \frac{1}{r^2}.\frac{L^2}{2\mu} = H_r + H_\Omega$$

L'opérateur L^2 n'agit que sur les variables angulaires $\Omega = (\theta,\varphi)$, il commute alors avec l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial r^2}$ et avec toute fonction $V(r)$ de r, il s'ensuit que :

$$[H_r\,, L^2] = 0 \quad \Rightarrow \quad [H, L^2] = [H, H_r] = 0$$

Donc, H, H_r et L^2 possèdent des fonctions propres communes.

H_r agit dans le sous-espace $\mathscr{E}_r$ et a pour fonctions propres $R(r)$;

L^2 agit dans le sous-espace $\mathscr{E}_\Omega$ et a pour fonctions propres les harmoniques sphériques $Y_l^m(\theta,\varphi)$;

Donc l'hamiltonien H agit dans l'espace produit tensoriel $\mathscr{E} = \mathscr{E}_r \otimes \mathscr{E}_\Omega$, et a pour fonctions propres :

$$\boxed{\psi(r,\theta,\varphi) = R(r)Y_l^m(\theta,\varphi)}$$

c. L'équation différentielle satisfaite par la fonction radiale $R(r)$:

L'équation de Schrödinger $(*)$ décrivant l'évolution de l'état stationnaire s'écrit alors :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r+\frac{L^2}{2\mu r^2}+V(r)\right]R(r)Y_l^m(\theta,\varphi)=E\ R(r)Y_l^m(\theta,\varphi)$$

Pour l fixé, on a :

$$\frac{L^2}{2\mu r^2}R(r)Y_l^m(\theta,\varphi)=\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}R(r)Y_l^m(\theta,\varphi)$$

Donc :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r+\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}+V(r)\right]R(r)Y_l^m(\theta,\varphi)=E\ R(r)Y_l^m(\theta,\varphi)$$

En divisant par $Y_l^m(\theta,\varphi)$ on obtient l'équation différentielle satisfaite par la fonction radiale $R(r)$:

1

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2\mu r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\big(rR(r)\big)+\left(\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}+V(r)\right)R(r)=E\ R(r)}$$

3. Les harmoniques sphériques $Y_l^m(\theta,\varphi)$ sont les fonctions propres communes à L^2 et L_z ; elles sont définies par :

$$Y_l^m(\theta,\varphi)=\langle\,\theta,\varphi\,|\,l,m\,\rangle$$

a. Montrons que $Y_l^m(\theta,\varphi)$ s'écrit sous la forme :

$$Y_l^m(\theta,\varphi)=F_{l,m}(\theta)G_m(\varphi)$$

- On a :

$$L_z\ Y_l^m(\theta,\varphi)=\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}Y_l^m(\theta,\varphi)=m\hbar\ Y_l^m(\theta,\varphi)$$

Donc :

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}Y_l^m(\theta,\varphi)=i\,m\ Y_l^m(\theta,\varphi)$$

Les solutions de cette équation sont de la forme :

1

$$\boxed{Y_l^m(\theta,\varphi)=F_{l,m}(\theta)e^{im\varphi}\quad\Rightarrow\quad G_m(\varphi)=e^{im\varphi}}$$

- Comme $0\le\varphi\le 2\pi$ et la fonction d'onde doit être continue en tout point, on a alors :

$$Y_l^m(\theta,\varphi=0)=Y_l^m(\theta,\varphi=2\pi)\quad\Rightarrow\quad e^{2\pi i m}=1$$

Ce qui implique que m ne peut prendre que des valeurs entières :

1

$$m=0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\cdots$$

b. On considère le cas $m=l$, montrons que :

$$F_{l,l}(\theta)=C_l\,(\sin\theta)^l$$

- On a :

$$L_+|\,l,l\,\rangle=0 \quad\Rightarrow\quad \langle\theta,\varphi|L_+|\,l,l\,\rangle=0 \quad\Rightarrow\quad L_+Y_l^l(\theta,\varphi)=0$$

Or :

$$L_+=\hbar e^{i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+i\cot g\theta.\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

Donc :

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+i\cot g\theta.\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)F_{l,l}(\theta)e^{il\varphi}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{dF_{l,l}(\theta)}{d\theta}.e^{il\varphi}-l.\cot g\theta.F_{l,l}(\theta)e^{il\varphi}=0$$

$$\Rightarrow\quad \frac{dF_{l,l}(\theta)}{F_{l,l}(\theta)}=l.\cot g\theta.d\theta=l\frac{d(\sin\theta)}{\sin\theta} \quad\Rightarrow\quad Ln\,F_{l,l}(\theta)=l\,Ln(\sin\theta)=Ln(\sin\theta)^l$$

$$\Rightarrow\quad F_{l,l}(\theta)=c_l\,(\sin\theta)^l$$

D'où :

1 $$\boxed{Y_l^l(\theta,\varphi)=C_l\,(\sin\theta)^l\,e^{il\varphi}}$$

où C_l est la constante de normalisation.

c. Pour obtenir $Y_l^m(\theta,\varphi)$ à partir de $Y_l^l(\theta,\varphi)$:

Les expressions des fonctions $Y_l^m(\theta,\varphi)$ s'obtiennent par applications successives de l'opérateurs L_- sur les fonctions $Y_l^l(\theta,\varphi)$. En effet :

1 $$L_-Y_l^l(\theta,\varphi)\,\alpha\,Y_l^{l-1}(\theta,\varphi) \quad\Rightarrow\quad L_-^pY_l^l(\theta,\varphi)\,\alpha\,Y_l^{l-p}(\theta,\varphi) \quad ; \quad p=1,2,3,\cdots$$

Donc, pour obtenir $Y_l^m(\theta,\varphi)$, il faut que $l-p=m \quad\Rightarrow\quad p=l-m$.

Ainsi, les fonctions $Y_l^m(\theta,\varphi)$ s'obtiennent en appliquant $(l-m)$ fois l'opérateur L_- sur la fonction $Y_l^l(\theta,\varphi)$.

d. Expressions des harmoniques sphériques : $Y_1^1(\theta,\varphi)$, $Y_1^0(\theta,\varphi)$ et $Y_1^{-1}(\theta,\varphi)$

- $l=1 \quad\Rightarrow\quad C_1=-\sqrt{\dfrac{3}{8\pi}}$, donc :

1 $$\boxed{Y_1^1(\theta,\varphi)=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta.e^{i\varphi}}$$

- On a d'une part :

$$L_-|1,1\rangle=\hbar\sqrt{2}|1,0\rangle \quad\Rightarrow\quad L_-Y_1^1(\theta,\varphi)=\hbar\sqrt{2}\,Y_1^0(\theta,\varphi)$$

D'autre part :

$$L_-Y_1^1(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\hbar e^{-i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-i\cot g\theta.\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\sin\theta.e^{i\varphi}=\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\hbar e^{-i\varphi}\left(\cos\theta+\cot g\theta.\sin\theta\right).e^{i\varphi}$$

Donc :

$$\hbar\sqrt{2}\,Y_1^0(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,2\hbar\cos\theta$$

D'où:

1 $$\boxed{Y_1^0(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta}$$

- De même :

$$L_-\left|1,0\right\rangle=\hbar\sqrt{2}\left|1,-1\right\rangle \quad\Rightarrow\quad L_-\,Y_1^0(\theta,\varphi)=\hbar\sqrt{2}\,Y_1^{-1}(\theta,\varphi)$$

D'autre part :

$$L_-\,Y_1^0(\theta,\varphi)=-\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\hbar e^{-i\varphi}\frac{d}{d\theta}(\cos\theta)=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\hbar\sin\theta.e^{-i\varphi}$$

Donc :

$$\hbar\sqrt{2}\,Y_1^{-1}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\hbar\sin\theta.e^{-i\varphi}$$

D'où:

1 $$\boxed{Y_1^{-1}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\sin\theta.e^{-i\varphi}}$$

Problème II (10 points) : Moment cinétique $j=1$ dans un champ magnétique

Le système quantique est de moment cinétique $j=1$. Le sous-espace $\mathscr{E}_1$ à trois dimensions est rapporté à la base $\left\{\left|+1\right\rangle,\left|0\right\rangle,\left|-1\right\rangle\right\}$. L'hamiltonien H_0 du système est :

$$H_0=a\,J_z+\frac{b}{\hbar}J_z^2$$

où a et b sont deux constantes positives, ayant les dimensions d'une pulsation.

1. Les niveaux d'énergie du système :

On a :

$$H_0\left|m\right\rangle=\left(a\,J_z+\frac{b}{\hbar}J_z^2\right)\left|m\right\rangle=(am\hbar+bm^2\hbar)\left|m\right\rangle$$

Donc :

1
$$\begin{aligned}H_0\left|+1\right\rangle&=(a+b)\hbar\left|+1\right\rangle\\ H_0\left|0\right\rangle&=0\\ H_0\left|-1\right\rangle&=(b-a)\hbar\left|-1\right\rangle\end{aligned}$$

Les niveaux d'énergie de H_0 (hamiltonien non perturbé) sont alors :

1,5
$$\boxed{\begin{array}{lll}E_{+1}^{(0)}=(a+b)\hbar & \rightarrow & \left|+1\right\rangle\\ E_0^{(0)}=0 & \rightarrow & \left|0\right\rangle\\ E_{-1}^{(0)}=(b-a)\hbar & \rightarrow & \left|-1\right\rangle\end{array}}$$

2. a. Expression de W en fonction des opérateurs J_+, J_- et J_z :

L'hamiltonien d'interaction du champ $\vec{B}$ avec le moment magnétique du système $\vec{M} = \gamma \vec{J}$ est :

0,5
$$W = -\vec{M}.\vec{B} = -B\gamma\,\vec{J}.\vec{u} = \omega J_u$$

$\omega = -\gamma B$ la pulsation de Larmor.

Donc :

$$J_u = \vec{J}.\vec{u} = J_x \sin\theta\cos\varphi + J_y \sin\theta\sin\varphi + J_z\cos\theta$$

Ce qui implique :

$$W = \omega\left(J_x \sin\theta\cos\varphi + J_y \sin\theta\sin\varphi + J_z\cos\theta\right)$$

Or :

$$\begin{cases} J_+ = J_x + i\,J_x \\ J_- = J_x - i\,J_x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad J_x = \frac{1}{2}(J_+ + J_-) \quad , \quad J_y = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-)$$

Donc :

$$\begin{aligned} W &= \omega\left[\frac{1}{2}(J_+ + J_-)\sin\theta\cos\varphi + \frac{1}{2i}(J_+ - J_-)\sin\theta\sin\varphi + J_z\cos\theta\right] \\ &= \omega\sin\theta\left[\frac{1}{2}(J_+ + J_-)\cos\varphi + \frac{1}{2i}(J_+ - J_-)\sin\varphi + L_z\cos\theta\right] + \omega J_z\cos\theta \\ &= \omega\sin\theta\left[\frac{1}{2}J_+(\cos\varphi - i\sin\varphi) + \frac{1}{2}J_-(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right] + \omega J_z\cos\theta \end{aligned}$$

D'où :

1
$$\boxed{W = \omega\left[\frac{1}{2}(J_+ e^{-i\varphi} + J_- e^{i\varphi})\sin\theta + J_z\cos\theta\right]}$$

b. Matrice représentant W dans la base $\{|+1\rangle, |0\rangle, |-1\rangle\}$:

1
$$W = \hbar\omega\begin{pmatrix} \cos\theta & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\, e^{-i\varphi} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\, e^{i\varphi} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\, e^{-i\varphi} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\, e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

3. On suppose que $\vec{u} = \vec{e}_x$, donc $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\varphi = 0$, dans ce cas :

0,5
$$W = \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \omega << a$$

On suppose aussi que $a = b$, alors les niveaux d'énergie du système sont :

- Niveau fondamental :

$$E_0^{(0)} = E_{-1}^{(0)} = 0 \text{ : énergie propre 2 fois dégénérée} \quad \Rightarrow \quad \text{états propres : } |0\rangle \text{ et } |-1\rangle$$

0,5

- Niveau excité :

$$E_{+1}^{(0)} = 2a\hbar \quad \text{: énergie propre non dégénérée} \quad \Rightarrow \quad \text{état propre : } |+1\rangle$$

a. Corrections à l'énergie propre et au vecteur propre du niveau fondamental :

Ce niveau d'énergie est dégénéré, il faut alors diagonaliser la restriction de la matrice de W au sous – espace engendré par les vecteurs $|0\rangle$ et $|-1\rangle$:

$$\frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres et les vecteurs propres correspondants sont :

$$\varepsilon_+ = \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}} \quad : \quad |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |-1\rangle\right) \quad \text{et} \quad \varepsilon_- = -\frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}} \quad : \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle - |-1\rangle\right)$$

Le niveau fondamental dégénéré se divise en deux sous – niveaux d'énergies respectives :

0,5 $\boxed{E_{0+} = E_0^{(0)} + \varepsilon_+ = \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}}}$ et $\boxed{E_{0-} = E_0^{(0)} + \varepsilon_- = -\frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}}}$

Les vecteurs propres associés $|+\rangle$ et $|-\rangle$ sont les états propres à l'ordre zéro :

0,5 $\boxed{|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |-1\rangle\right)}$ et $\boxed{|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle - |-1\rangle\right)}$

b. Corrections à l'énergie propre du niveau excité :

Le niveau excité d'énergie $E_{+1}^{(0)} = 2a\hbar$ est non dégénérée, le vecteur propre correspondant est $|+1\rangle$.

- **Au premier ordre de perturbation :**

0,5 $\boxed{E_{+1}^{(1)} = \langle +1|W|+1\rangle = 0}$

- **Au second ordre de perturbation :**

$$E_{+1}^{(2)} = \frac{1}{E_{+1}^{(0)} - E_0^{(0)}}\left[\left|\langle -1|W|+1\rangle\right|^2 + \left|\langle 0|W|+1\rangle\right|^2\right] = \frac{1}{2a\hbar}\left[0 + \left(\frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}}\right)^2\right] = \frac{\hbar\omega^2}{4a}$$

Donc :

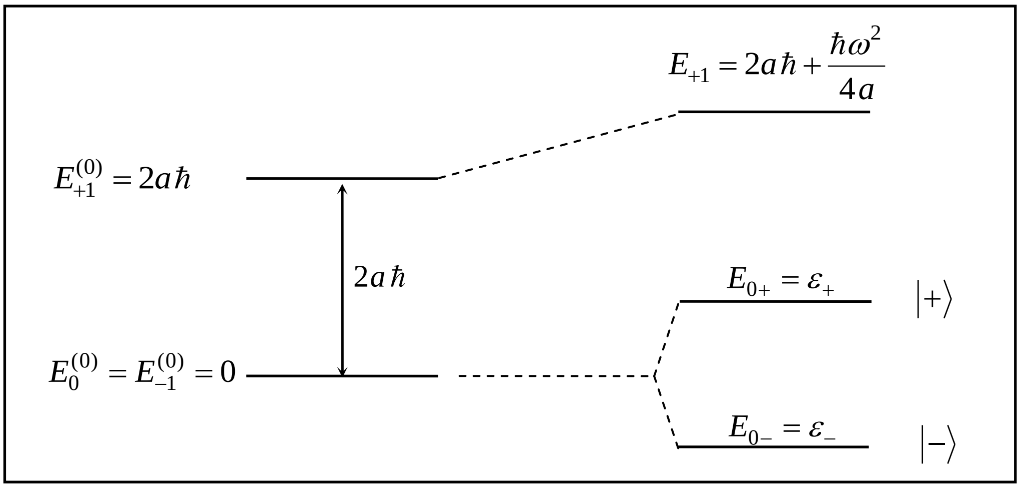
0,5 $\boxed{E_{+1}^{(2)} = \frac{\hbar\omega^2}{4a}}$

Ainsi, au second ordre de perturbation, l'énergie du niveau excité est :

0,5 $\boxed{E_{+1} = E_{+1}^{(0)} + E_{+1}^{(1)} + E_{+1}^{(2)} = 2a\hbar + \frac{\hbar\omega^2}{4a}}$

Diagramme d'énergie :

0,5



4. On suppose que $b = 2a$ et que $\omega << a$. Dans ce cas :

0,5

$$H_0|+1\rangle = 3a\hbar|+1\rangle$$
$$H_0|0\rangle = 0$$
$$H_0|-1\rangle = a\hbar|-1\rangle$$

Les niveaux d'énergie ne sont pas dégénérés et le niveau fondamental a pour énergie propre $E_0^{(0)} = 0$ et pour vecteur propre le ket $|0\rangle$.

A l'ordre 1 de perturbation, le vecteur propre du niveau fondamental s'écrit alors :

$$\begin{aligned}|\psi_0\rangle &= |0\rangle + \sum_{m\neq 0} \frac{\langle m|W|0\rangle}{E_0^{(0)} - E_m^{(0)}}|m\rangle \\ &= |0\rangle + \frac{\langle +1|W|0\rangle}{E_0^{(0)} - E_{+1}^{(0)}}|+1\rangle + \frac{\langle -1|W|0\rangle}{E_0^{(0)} - E_{-1}^{(0)}}|-1\rangle\end{aligned}$$

Or :

$$\langle +1|W|0\rangle = \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}}\sin\theta e^{-i\varphi} \quad \text{et} \quad \langle -1|W|0\rangle = \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}}\sin\theta e^{i\varphi}$$

Donc :

0,5

$$\boxed{|\psi_0\rangle = |0\rangle - \frac{\omega\sin\theta\, e^{-i\varphi}}{3a\sqrt{2}}|+1\rangle - \frac{\omega\sin\theta\, e^{i\varphi}}{a\sqrt{2}}|-1\rangle}$$

UNIVERSITÉ IBN ZOHR
FACULTÉ DES SCIENCES
AGADIR

Année universitaire 2016 - 2017
Session de rattrapage

Epreuve de Mécanique Quantique 2 – SMP5

Durée : 2 h 00 - Aucun document n'est autorisé

Couplage spin - orbite et effet Zeeman

On considère l'électron $2p$ de l'atome d'hydrogène, caractérisé par un moment cinétique orbital $\vec{L}$ et un moment de spin $\vec{S}$, de nombres quantiques respectifs $(l=1)$ et $(s=1/2)$.

On désigne par $\left\{\left| l,\, m_l \right\rangle \otimes \left| s,\, m_s \right\rangle\right\}$ que l'on notera simplement $\left\{\left| m_l\,,\, m_s = \pm \right\rangle\right\}$ la base découplée formée par les vecteurs propres communs aux observables L^2, S^2, L_z et S_z.

Le moment cinétique total de l'électron $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ est caractérisé par les nombres quantiques *J* et *M*. On désignera par $\left\{\left| l,\, s,\, J, M \right\rangle\right\}$ que l'on notera simplement $\left\{\left| J\,,\, M \right\rangle\right\}$ la base couplée formée par les vecteurs propres communs aux observables L^2, S^2, J^2 et J_z.

Partie I (9 points)

1. Préciser les espaces des états $\mathscr{E}_l = \left\{\left| l,\, m_l \right\rangle\right\}$ et $\mathscr{E}_s = \left\{\left| s,\, m_s \right\rangle\right\}$ associés à chaque moment cinétique : quels sont leurs vecteurs de base et leurs dimensions ?

2. Quelle est la dimension de l'espace des états $\mathscr{E} = \mathscr{E}_l \otimes \mathscr{E}_s$? Donner les vecteurs de la base découplée $\left\{\left| m_l\,,\, m_s = \pm \right\rangle\right\}$.

3. Montrer que $\vec{J}$ vérifie les relations de commutation caractéristiques des moments cinétiques.

4. Montrer que $[J^2, J_z] = 0$.

5. Quelles sont **les valeurs possibles** prises par les nombres quantiques *J* et *M* ?

6. En utilisant **la méthode du rectangle**, reporter les différentes valeurs de m_l et m_s sur un graphe et calculer **le degré de dégénérescence des valeurs de *M***.

7. En appliquant les résultats de **la théorie de l'addition des moments cinétiques**, donner les expressions des vecteurs $\left| J\,,\, M \right\rangle$ en fonction des vecteurs $\left| m_l\,,\, m_s = \pm \right\rangle$.

Partie II (5 points)

L'interaction spin – orbite entre les moments cinétiques orbital et de spin de l'électron est décrite par l'hamiltonien W_{SO} donné par :

$$W_{SO} = a\ \vec{L}.\vec{S}$$

où a est une constante positive (constante de couplage spin – orbite).

L'hamiltonien total du système s'écrit alors :

$$H_1 = H_0 + W_{SO}$$

où H_0 est l'hamiltonien atomique en l'absence du couplage ; il forme un ECOC avec L^2, S^2, L_z et S_z.

On suppose que les kets $|\, m_l\,,\, m_s = \pm\rangle$ sont tous vecteurs propres de H_0 avec la même valeur propre E_0 ; c'est l'énergie de l'état $2p$: $E_0 = E(2p)$.

1. Donner l'expression de l'hamiltonien W_{SO} en fonction des observables J^2, L^2 et S^2.

2. Montrer que les vecteurs $|\, J\,,\, M\rangle$ sont des vecteurs propres de W_{SO}, et donner les valeurs propres correspondantes.

3. En déduire **les énergies propres** de l'hamiltonien $H_1 = H_0 + W_{SO}$, **les états propres** correspondants et **la dégénérescence** des niveaux.

4. Quelle est alors l'effet du couplage spin – orbite sur les niveaux d'énergie de H_0.

Partie III (6 points)

On applique au système un champ magnétique statique $\vec{B}$, dirigé selon l'axe *Oz*, de sorte que l'hamiltonien total du système devient :

$$H = (H_0 + W_{SO}) + W_Z = H_1 + W_Z$$

où W_Z est l'hamiltonien d'interaction avec le champ $\vec{B}$ (appelé aussi **hamiltonien Zeeman**).

1. Donner l'expression de l'opérateur **moment magnétique total** $\overrightarrow{M}$ de l'électron. En déduire l'expression de l'hamiltonien Zeeman W_Z.

On posera $\omega = -\gamma_0 B$ (pulsation de Larmor), où γ_0 est le rapport gyromagnétique orbital.

2. Quand **le champ magnétique** B **est très faible**, l'hamiltonien Zeeman W_Z peut s'écrire, dans chaque sous – espace propre, sous la forme suivante :

$$W_Z = \left(\frac{3}{2} + \frac{s(s+1) - l(l+1)}{2J(J+1)} \right) \omega J_z$$

a. Montrer que les vecteurs $|\, J\,,\, M\rangle$ sont des vecteurs propres de l'hamiltonien Zeeman W_Z, et donner les valeurs propres correspondantes.

b. En déduire **les énergies propres de l'hamiltonien total** $H = H_1 + W_Z$.

c. Quelle est alors l'effet du champ magnétique sur les niveaux d'énergie **(effet Zeeman)**.

3. Rassembler les résultats dans un **diagramme des énergies** qui montre **les effets du couplage spin – orbite** et **du champ magnétique** sur les niveaux d'énergie.

UNIVERSITÉ IBN ZOHR
FACULTÉ DES SCIENCES
AGADIR

Année universitaire 2016 - 2017
Session de rattrapage

Epreuve de Mécanique Quantique 2 – SMP5

Corrigé

L'électron $2p$ est caractérisé par un moment cinétique orbital $\vec{L}$ de nombre quantique $(l=1)$ et un moment cinétique de spin $\vec{S}$ $(s=1/2)$.

On désigne par $\{|\, l,\, m_l\,\rangle \otimes |\, s,\, m_s\rangle\}$ que l'on notera simplement $\{|\, m_l\,,\, m_s=\pm\rangle\}$ la base des vecteurs propres communs aux observables L^2, S^2, L_z et S_z.

Partie I

1. Espaces des états :

0,5

- $l=1 \quad \Rightarrow \quad m=1\,,0\,,-1$, donc :

$$\mathscr{E}_l=\{|1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle\} \quad \text{et} \quad \dim(\mathscr{E}_l)=3.$$

- $s=\dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad m=\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}$, donc :

$$\mathscr{E}_s=\left\{\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\right\} \equiv \{|+\rangle, |-\rangle\} \quad \text{et} \quad \dim(\mathscr{E}_s)=2.$$

2. L'espace des états $\mathscr{E}=\mathscr{E}_l \otimes \mathscr{E}_s$ est donc de dimension 6, et est rapporté à la base découplée :

0,5

$$\{|\, m_l\,,\, m_s=\pm\rangle\}=\{|1,+\rangle, |1,-\rangle, |0,+\rangle, |0,-\rangle, |-1,+\rangle, |-1,-\rangle\}$$

3. $\vec{J}$ vérifie les relations de commutation caractéristiques des moments cinétiques :

0,5

$$[J_x, J_y]=[L_x+S_x, L_y+S_y]=[L_x, L_y]+[S_x, S_y]=i\hbar(L_z+S_z)=i\hbar J_z$$

Les deux autres relations $[J_y, J_z]=i\hbar J_x$ et $[J_z, J_x]=i\hbar J_y$ s'obtiennent de la même façon.

Ce qui montre que $\vec{J}$ est un moment cinétique.

4. Montrons que : $[J^2, J_z]=0$.

0,5

$$\begin{aligned}
[J^2, J_z] &= [J_x^2, J_z]+[J_y^2, J_z]+[J_z^2, J_z] \\
&= J_x[J_x, J_z]+[J_x, J_z]J_x+J_y[J_y, J_z]+[J_y, J_z]J_y \\
&= -i\hbar J_x J_y - i\hbar J_y J_x + i\hbar J_y J_x + i\hbar J_x J_y \\
&= 0
\end{aligned}$$

5. Les valeurs possibles prises par les nombres J et M :

Les règles de sélection établies par la théorie d'addition des moments cinétiques sont :

$$|l-s| \le J \le l+s \qquad , \qquad -J \le M \le J$$

Ce qui implique les différentes valeurs prises par J et M :

1

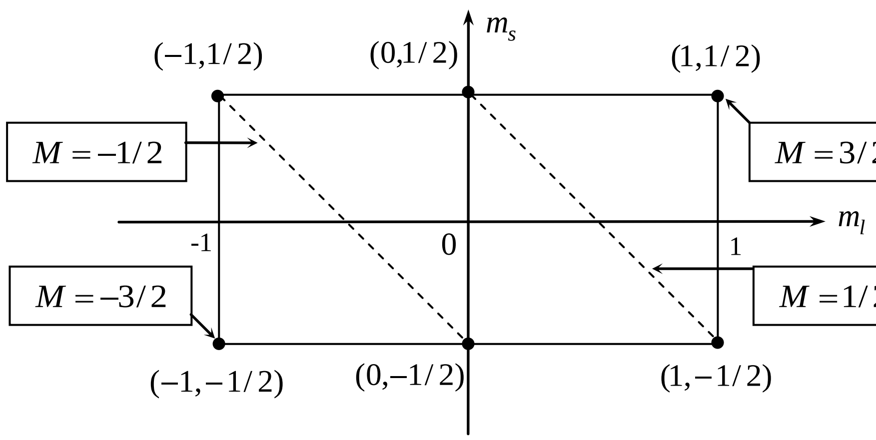
J	M	$\|J, M\rangle$	Sous - espaces
$\frac{3}{2}$	$\pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}$	$\left\|\frac{3}{2}, \pm\frac{3}{2}\right\rangle, \left\|\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle$	$\mathscr{E}\left(J=\frac{3}{2}\right)$
$\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\left\|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle$	$\mathscr{E}\left(J=\frac{1}{2}\right)$

La base couplée est :

$$\{|J, M\rangle\} = \left\{ \left|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle \right\}$$

6. Degré de dégénérescence des différentes valeurs de M :

1



Ainsi, les valeurs $M = \pm\frac{3}{2}$ sont non dégénérées, alors que les valeurs $M = \pm\frac{1}{2}$ sont deux fois dégénérées.

7. Expressions des vecteurs $|J, M\rangle$ en fonction des vecteurs $|m_l, m_s = \pm\rangle$:

i. Le sous – espace $\mathscr{E}\left(J = \frac{3}{2}\right)$:

- Le vecteur $\left|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle$:

La valeur maximale $M = \frac{3}{2}$ correspond à la seule combinaison possible $m_l = 1$ et $m_s = \frac{1}{2}$. Donc, la valeur $M = \frac{3}{2}$ n'est pas dégénérée impliquant que les vecteurs $\left|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle$ et $|1, +\rangle$ sont proportionnels :

0,5 $$\boxed{\left|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle = |1, +\rangle}$$

- Le vecteur $\left|\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle$:

La valeur minimale $M=-\frac{3}{2}$ correspond à la seule combinaison possible $m_l=-1$ et $m_s=-\frac{1}{2}$.

Donc :

0,5 $$\boxed{\left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle=\left|-1,-\right\rangle}$$

- Le vecteur $\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$:

Appliquons l'opérateur $J_-=L_-+S_-$ sur le ket $\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle$:

$$J_-\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle=(L_-+S_-)\left|1,+\right\rangle=\left(L_-\left|1,1\right\rangle\right)\otimes\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle+\left|1,1\right\rangle\otimes\left(S_-\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\right)$$

$$\Rightarrow\quad \hbar\sqrt{3}\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle=\hbar\sqrt{2}\left|1,0\right\rangle\otimes\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle+\hbar\left|1,1\right\rangle\otimes\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle=\hbar\sqrt{2}\left|0,+\right\rangle+\hbar\left|1,-\right\rangle$$

D'où :

1 $$\boxed{\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{2}{3}}\left|0,+\right\rangle+\frac{1}{\sqrt{3}}\left|1,-\right\rangle}$$

- Le vecteur $\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$:

Ce vecteur peut être calculé de deux façons :

$$J_+\left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle\quad \text{ou}\quad J_-\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$$

Appliquons l'opérateur $J_+=L_++S_+$ sur le ket $\left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle$:

$$J_+\left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle=(L_++S_+)\left|-1,-\right\rangle=\left(L_+\left|1,-1\right\rangle\right)\otimes\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle+\left|1,-1\right\rangle\otimes\left(S_+\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\right)$$

$$\Rightarrow\quad \hbar\sqrt{3}\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle=\hbar\sqrt{2}\left|1,0\right\rangle\otimes\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle+\hbar\left|1,-1\right\rangle\otimes\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle=\hbar\sqrt{2}\left|0,-\right\rangle+\hbar\left|-1,+\right\rangle$$

D'où :

1 $$\boxed{\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{2}{3}}\left|0,-\right\rangle+\frac{1}{\sqrt{3}}\left|-1,+\right\rangle}$$

ii. Le sous – espace $\mathscr{E}\left(J=\frac{1}{2}\right)$:

- Le vecteur $\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$:

La valeur $M=\frac{1}{2}$ peut être réalisée de deux manières : $\left(m_l=0\,,m_s=\frac{1}{2}\right)$ ou $\left(m_l=1\,,m_s=-\frac{1}{2}\right)$.

Donc, le vecteur $\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$ est proportionnel aux vecteurs $\left|0,+\right\rangle$ et $\left|1,-\right\rangle$:

$$\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle=a\left|1,-\right\rangle+b\left|0,+\right\rangle$$

- La condition de normalisation s'écrit : $a^2 + b^2 = 1$ (car a et b sont réels)

- Le vecteur $\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$ doit être orthogonal avec le vecteur $\left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$: $\sqrt{2}\, a + b = 0$

Ces deux conditions impliquent :

$$a = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad , \quad b = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Donc :

1 $$\boxed{\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}} \left| 0\,, + \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| 1, - \right\rangle}$$

Puisque le vecteur est défini à un facteur de phase arbitraire, on accepte aussi l'expression :

$$\boxed{\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left| 0\,, + \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| 1, - \right\rangle}$$

- Le vecteur $\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$:

La valeur $M = -\frac{1}{2}$ peut être réalisée de deux manières : $\left(m_l = 0\,, m_s = -\frac{1}{2}\right)$ ou $\left(m_l = -1\,, m_s = \frac{1}{2}\right)$.

Donc, le vecteur $\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$ est proportionnel aux vecteurs $\left| 0\,, - \right\rangle$ et $\left| -1, + \right\rangle$:

$$\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle = a \left| 0, - \right\rangle + b \left| -1\,, + \right\rangle$$

- La condition de normalisation s'écrit : $a^2 + b^2 = 1$

- Le vecteur $\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$ doit être orthogonal avec le vecteur $\left|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$: $\sqrt{2}\, a + b = 0$

Ces deux conditions impliquent :

$$a = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad , \quad b = -\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Donc :

1 $$\boxed{\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left| 0, - \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| -1\,, + \right\rangle}$$

Puisque le vecteur est défini à un facteur de phase arbitraire, on accepte aussi l'expression :

$$\boxed{\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}} \left| 0, - \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| -1\,, + \right\rangle}$$

Le vecteur $\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$ peut être trouvé en calculant $J_-\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$.

Partie II

L'hamiltonien d'interaction spin – orbite W_{SO} est :

$$W_{SO} = a\,\vec{L}.\vec{S}$$

où a est une constante positive.

1. Expression de l'hamiltonien W_{SO} en fonction des observables J^2, L^2 et S^2 :

$$J^2 = (\vec{L}+\vec{S})^2 = L^2 + S^2 + 2\vec{L}.\vec{S} \quad \Rightarrow \quad \vec{L}.\vec{S} = \frac{1}{2}\left(J^2 - L^2 - S^2\right)$$

Donc :

1

$$\boxed{W_{SO} = a\,\vec{L}.\vec{S} = \frac{a}{2}\left(J^2 - L^2 - S^2\right)}$$

2. Montrons que les vecteurs $\left| J\,,\,M \right\rangle$ sont des vecteurs propres de W_{SO} :

L'action de W_{SO} sur les vecteurs $\left| J\,,\,M \right\rangle$ est donnée par :

$$W_{SO}\left| J\,,\,M \right\rangle = \frac{a\hbar^2}{2}\left(J(J+1) - \frac{11}{4}.\mathrm{I}\right)\left| J\,,\,M \right\rangle$$

Donc :

$$W_{SO}\left| J = \frac{3}{2},\, M \right\rangle = \frac{a\hbar^2}{2}\left| J = \frac{3}{2},\, M \right\rangle \qquad , \qquad W_{SO}\left| J = \frac{1}{2},\, M \right\rangle = -a\hbar^2\left| J = \frac{1}{2},\, M \right\rangle$$

D'où :

2

$$W_{SO}\left| \frac{3}{2}, \pm\frac{3}{2} \right\rangle = \frac{a\hbar^2}{2}\left| \frac{3}{2}, \pm\frac{3}{2} \right\rangle$$

$$W_{SO}\left| \frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle = \frac{a\hbar^2}{2}\left| \frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$W_{SO}\left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle = -a\hbar^2\left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle$$

3. Les énergies propres et les états propres de l'hamiltonien total H_1:

1

Energies propres de H_1	Vecteurs propres	Dégénérescence
$E_0 + \frac{a\hbar^2}{2}$	$\left\| \frac{3}{2}, \pm\frac{3}{2} \right\rangle$, $\left\| \frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle$	4
$E_0 - a\hbar^2$	$\left\| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle$	2

4. L'effet du couplage spin – orbite sur les niveaux d'énergie de H_0 :

Le couplage spin – orbite W_{SO} divise le niveau $2p$ d'énergie E_0 en deux sous – niveaux :

1 - un niveau multiplet, noté $2p_{\frac{3}{2}}$, d'énergie $\left(E_0 + \frac{a\hbar^2}{2}\right)$;

- un niveau doublet, noté $2p_{\frac{1}{2}}$, d'énergie $(E_0 - a\hbar^2)$.

Partie III

1. Expression de l'opérateur moment magnétique total de l'électron :

L'opérateur moment magnétique total de l'électron est la somme des moments magnétiques associés aux moments cinétiques orbital et de spin :

$$\overrightarrow{M} = \gamma_o \vec{L} + \gamma_s \vec{S} = \gamma_o (\vec{L} + g_s \vec{S})$$

Or, pour l'électron $g_s \approx 2$, donc :

0,5 $$\boxed{\vec{M} = -\gamma_0(\vec{L} + 2\vec{S})}$$

où γ_0 est le rapport gyromagnétique orbital.

- **Expression de l'hamiltonien Zeeman W_Z :**

Dans un champ magnétique $\vec{B} = B.\vec{e}_z$, l'hamiltonien d'interaction entre ce dernier et le moment magnétique total de l'électron est :

$$W_Z = -\overrightarrow{M}.\vec{B} = -\gamma_o \vec{B}.(\vec{L} + 2\vec{S}) = -\gamma_o B.(L_z + 2S_z)$$

Donc :

0,5 $$\boxed{W_Z = \omega\,(L_z + 2S_z)}$$

où $\omega = -\gamma_0 B$ est la pulsation de Larmor.

2. On suppose que le champ magnétique B est très faible de sorte que l'hamiltonien d'interaction W_Z puisse s'écrire sous la forme suivante :

$$\boxed{W_Z = \left(\frac{3}{2} + \frac{s(s+1) - l(l+1)}{2J(J+1)}\right)\omega J_z}$$

a. Montrons que les vecteurs $|\,J\,,\,M\rangle$ sont des vecteurs propres de W_Z :

L'action de W_{SO} sur les vecteurs $|\,J\,,\,M\rangle$ est donnée par :

$$W_Z\,|J,M\rangle = \left(\frac{3}{2} + \frac{s(s+1) - l(l+1)}{2J(J+1)}\right) M\,\hbar\omega\,|J,M\rangle$$

Donc :

$$W_Z \left| J = \frac{3}{2}, M \right\rangle = \frac{4}{3} M\,\hbar\omega \left| J = \frac{3}{2}, M \right\rangle \quad , \quad W_Z \left| J = \frac{1}{2}, M \right\rangle = \frac{2}{3} M\,\hbar\omega \left| J = \frac{1}{2}, M \right\rangle$$

D'où :

$$W_Z \left| \frac{3}{2}, \pm\frac{3}{2} \right\rangle = \pm 2\hbar\omega \left| \frac{3}{2}, \pm\frac{3}{2} \right\rangle$$

1,5

$$W_Z \left| \frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle = \pm \frac{2}{3}\hbar\omega \left| \frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$W_Z \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle = \pm \frac{1}{3}\hbar\omega \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle$$

Ainsi, les vecteurs $\left| J\,, M \right\rangle$ sont vecteurs propres de l'hamiltonien W_Z.

b. Les énergies propres de l'hamiltonien total $H = H_1 + W_Z$:

$$H \left| \frac{3}{2}, \pm\frac{3}{2} \right\rangle = \left(E_0 + \frac{a\hbar^2}{2} \pm 2\hbar\omega \right) \left| \frac{3}{2}, \pm\frac{3}{2} \right\rangle$$

1,5

$$H \left| \frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle = \left(E_0 + \frac{a\hbar^2}{2} \pm \frac{2}{3}\hbar\omega \right) \left| \frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$H \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle = \left(E_0 - a\hbar^2 \pm \frac{1}{3}\hbar\omega \right) \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle$$

c. Effet du champ magnétique sur les niveaux d'énergie :

1 **L'application d'un champ magnétique faible lève complètement la dégénérescence des niveaux d'énergie : c'est l'effet Zeeman**.

3. Diagramme des énergies :

1